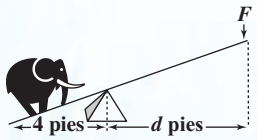
CAPÍTULO 6

Trabaja con expresiones

Matemáticas en la vida diaria

Levantamiento de pesas ¿Puedes levantar un elefante de 10,000 libras? ¡Claro que sí, pero primero debes encontrar una palanca lo suficientemente larga y lo suficientemente fuerte! El uso de palancas permite aplicar mayor fuerza, que la que se puede aplicar con los brazos solamente.

Supón que el elefante está situado a 4 pies de distancia del fulcro. La cantidad de fuerza que necesitarías aplicar equivaldría a $F = \frac{40{,}000}{d}$, en la cual d es la distancia entre el fulcro y el punto donde se aplica la fuerza.



Si tu palanca tuviera la misma longitud que el árbol más grande de la Tierra (alrededor de 368 pies), ¡sólo necesitarías aplicar 110 libras de fuerza a la palanca, para levantar el elefante!

Piensa al respecto ¿Qué crees que representa el número 40,000 de la ecuación $F = \frac{40{,}000}{d}$?

Carta a la familia

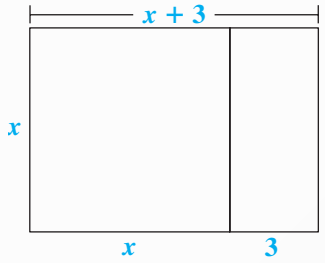
Estimados alumno(a) y familiares:

Estamos a punto de iniciar un nuevo tema en la clase de matemáticas. En esta ocasión, su hijo(a) escribirá, reducirá y trabajará con *expresiones algebraicas*. La mayor parte de este capítulo les será familiar y les hará recordar sus propios estudios de álgebra.

El álgebra es una de las herramientas más poderosas de las matemáticas. Parte de su utilidad, y de su belleza, es el modo en que permite plantear y resolver problemas, sin necesidad de hacer mucho trabajo. Por ejemplo:

> La entrada a un cine cuesta \$4.50 para adultos y la mitad del precio para niños, además, tienes un cupón de \$3 de descuento. ¿Cuánto pagarás en total? La respuesta es $\$[4.50x + 2.25(4) - 3]$ donde x representa el número de adultos.

Lo primero que haremos en este capítulo es aprender a multiplicar expresiones como $x(x + 5)$ y $(x + 1)(x + 5)$, usando un *modelo geométrico*. Por ejemplo, para calcular el área del rectángulo mayor de la siguiente figura se puede multiplicar el largo por el ancho, o $x(x + 3)$. Aunque también se puede obtener calculando primero el área del cuadrado, $x \cdot x$ o x^2 y luego sumar el área del rectángulo pequeño $x \cdot 3$ ó $3x$ ó 3x, lo que resulta en $x^2 + 3x$. Esto demuestra que $x(x + 3) = x^2 + 3x$.



Vocabulario Aprenderemos los siguientes términos nuevos en este capítulo:

binomio **desarrollar** **términos semejantes**

¿Qué pueden hacer en el hogar?

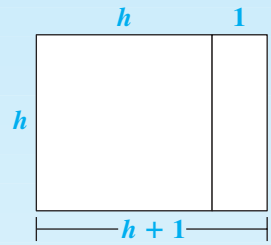
Durante el estudio de este capítulo, su hijo(a) estudiará situaciones concretas y modelos geométricos que le facilitarán el entendimiento de *por qué* los cálculos con símbolos se hacen de la manera en que se hacen. Pídanle a su hijo(a) que les explique lo que está estudiando, mediante modelos geométricos y símbolos, para que profundice aún más su comprensión del tema.

6.1 Reordena expresiones algebraicas

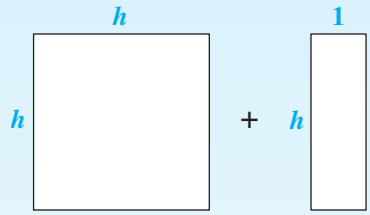
A veces, las ideas tomadas de la geometría pueden esclarecer ciertos aspectos del álgebra. En esta investigación, observarás un modelo geométrico que incluye rectángulos como ayuda para trabajar con expresiones algebraicas y para reducirlas.

Piensa & comenta

Este rectángulo se puede considerar como un cuadrado con una franja agregada a un lado. El ancho del rectángulo grande es 1 unidad más larga que su altura.



Si cortas y separas el rectángulo grande, obtienes un cuadrado y un rectángulo pequeño con las siguientes dimensiones.



- ¿Cuál es el área del cuadrado?
- ¿Cuál es el área del rectángulo pequeño?
- Usa las expresiones que escribiste anteriormente, escribe una expresión para el área del rectángulo grande.
- ¿Qué indica esto acerca de $h(h + 1)$ y $h^2 + h$? ¿Por qué?

Los diagramas de rectángulo, como los anteriores, son modelos geométricos que te pueden ayudar a averiguar cómo funciona la propiedad distributiva. Es decir, te pueden ayudar a entender por qué $a(b + c) = ab + ac$.

CONTENTS

VOCABULARIO
desarrollar

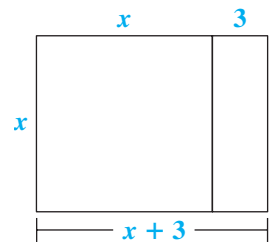
Al uso de la propiedad distributiva para multiplicar los factores a y $(b + c)$ se le llama **desarrollar** la expresión. Por ejemplo, para desarrollar la expresión $2(x + 1)$, multiplica 2 por $(x + 1)$ para obtener $2x + 2$. La expresión desarrollada de $h(h + 1)$ es $h^2 + h$.

Investigación 1 Usa modelos geométricos

En esta investigación, usarás modelos de rectángulos para representar expresiones algebraicas.

Serie de problemas A

1. Uno de los rectángulos en este diagrama tiene un área de $x(x + 3)$.



a. Copia el diagrama e indica el rectángulo que tiene el área $x(x + 3)$.

b. Usa tu diagrama para desarrollar la expresión $x(x + 3)$. Explica lo que hiciste.

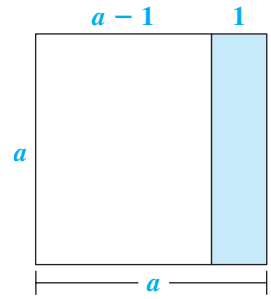
2. Dante y Héctor hacen otro diagrama de rectángulo.

Imagina que comienzas con un cuadrado con lado de x cm...
X
X
...y eliminas 3 cm de un lado...
¿Cómo puedes usar x para describir el área del rectángulo que queda?
Creo que hay dos expresiones para el área de ese rectángulo.

a. Escribe una expresión para contestar la pregunta de Dante.

b. ¿Tiene razón Héctor? Explica tu razonamiento.

3. En este diagrama, se quitó el rectángulo sombreado del cuadrado.



Explica dos maneras en que puedes usar el diagrama para hallar la expresión del área del rectángulo que no está sombreada. Da tus expresiones.

4. Usa la propiedad distributiva para volver a plantear cada expresión. Después haz un diagrama de rectángulo que muestre por qué las dos expresiones son equivalentes. Sombrea para indicar la eliminación de la región de un área.

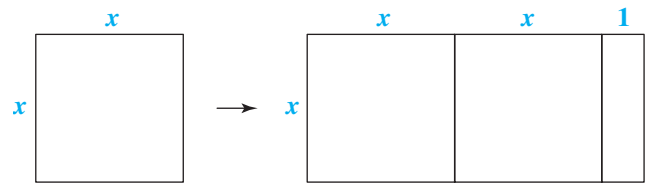
a. $b(b + 4)$

b. $m(m - 6)$

Ahora explorarás combinaciones más complejas de rectángulos y las expresiones algebraicas que representan.

Serie de problemas B

1. Comienza con un cuadrado con lado de longitud x. Crea un rectángulo grande agregando otro cuadrado del mismo tamaño y una franja de 1 unidad.



a. ¿Cuál es la altura del rectángulo grande?

b. Escribe una expresión reducida para el ancho del rectángulo grande.

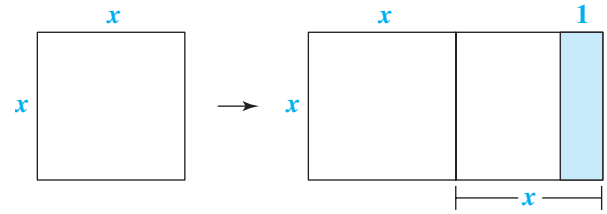
c. Usa las dimensiones de la Partes a y b para escribir una expresión para el área del rectángulo grande.

d. El rectángulo grande está compuesto de dos cuadrados y un rectángulo más pequeño. Escribe una expresión para el área de cada una de las partes. Después usa las áreas para escribir una expresión para el área del rectángulo grande, reduciéndolo si es necesario.

e. Tus dos expresiones para el área del rectángulo grande, para las Partes c y d, son equivalentes. Escribe una ecuación que manifieste esto y después usa la propiedad distributiva para verificar tu ecuación.

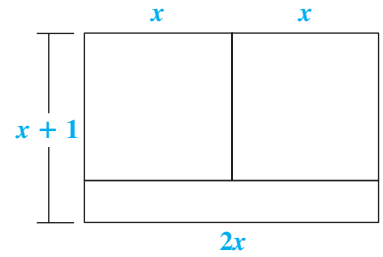
CONTENTS

2. Comienza con un cuadrado cuyo lado mida x, agrega otro cuadrado del mismo tamaño y *elimina* una franja de 1 unidad de ancho.



Usa el diagrama para ayudar a explicar por qué $x(2x - 1) = 2x^2 - x$.

3. Ahora comienza con un cuadrado cuyo lado mida x y haz un rectángulo con lados $2x$ y $x + 1$.



a. Usa la propiedad distributiva para desarrollar $2x(x + 1)$.

b. Usa el diagrama para explicar por qué tu desarrollo es equivalente a la expresión original.

4. Haz un diagrama de rectángulo que modele cada expresión. Usa el diagrama como ayuda para escribir la expresión en una forma diferente.

a. $2a(a - 1)$

b. $b^2 - 3b$

c. $c^2 + 2c$

5. Desarrolla cada expresión.

a. $3a(a + 4)$

b. $2m(3m - 2)$

c. $4x(3 + 2x)$

Comparte & resume

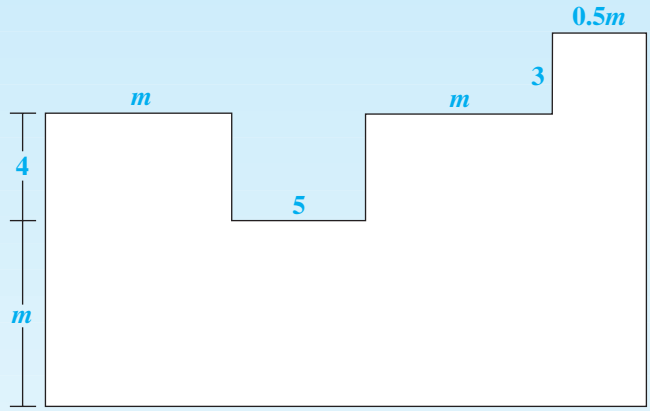
Según la propiedad distributiva, $a(b + c) = ab + ac$. Usa un modelo de rectángulo para explicar por qué la propiedad distributiva tiene sentido.

Investigación 2 Reduce expresiones

En la Investigación 1, aprendiste a desarrollar expresiones eliminando los paréntesis. Para facilitar el uso de las expresiones desarrolladas, puedes reducirlas.

Piensa & comenta

El siguiente es el plano es de una sala. Imagina que quieres comprar una alfombra nueva para la habitación. Todas las dimensiones están en pies.



- Escribe una expresión para el área del piso.
- Tamika escribió esta expresión para el área del piso:

$$m^2 + 4m + 5m + m^2 + 4m + 3.5m + 0.5m^2$$

¿Es correcta su expresión?

- Evalúa la expresión de Tamika cuando $m = 6$.

La expresión del área de Tamika tiene varios términos, pero puedes escribir una expresión equivalente con la que sea más fácil trabajar.

Por ejemplo, considera esta expresión:

$$k + 4k^2 + 3 - 2k^3 + 2k - 16 - 6k^4 + 3k^2 + 7k^3 + 19k^8$$

Dos de los términos son k y $2k$. Puedes razonar que su suma es $3k$, aunque no sepas lo que representa k. Un número más dos veces ese número es tres veces ese número, sea cual sea el número.

VOCABULARIO
términos semejantes

A k y $2k$ se les llama *términos semejantes*. Los **términos semejantes** tienen la misma variable elevada a la misma potencia; se pueden sumar o restar y después escribirse como un sólo término. Por ejemplo, en las expresiones anteriores,

$$4k^2 + 3k^2 = 7k^2 \qquad \text{y} \qquad -2k^3 + 7k^3 = 5k^3$$

De manera parecida, 3 y -16 son términos semejantes porque ambos son constantes (términos sin variables) y se pueden combinar para dar -13. Como los términos $-6k^4$ y $19k^8$ son diferentes uno del otro y diferentes a los otros términos, permanecen solos.

Puedes volver a plantear la expresión reducida como

$$19k^8 - 6k^4 + 5k^3 + 7k^2 + 3k - 13$$

Fíjate que, en las expresiones anteriores, los términos se ordenan según el exponente de la variable k.

Serie de problemas C

1. ¿Cuáles de estas expresiones son equivalentes a la expresión $p + 2p - p + 6 - 3 + 2p$?

$3p$ $\quad 7p$ $\quad 4p + 3$ $\quad 6p + 3$ $\quad 2p + 3 + 2p$ $\quad 4p - 3$

2. ¿Cuáles de estas expresiones son equivalentes a la expresión $y(2y + 3) - 5 + 2y - 2 + 3y^2 + 7$?

10 $\quad 2y^2 + 3y^2 + 5y$ $\quad 10y^2$ $\quad 12y + 14$ $\quad 5y^2 + 5y$

Evan trató de reducir las siguientes expresiones, pero cometió algunos errores. Para cada una, indica si la expresión reducida es correcta. De no serlo, identifica el error de Evan y escribe la expresión correcta.

3. $x + x + 7 = 2x + 7$

4. $m^2 + m^2 - 4 = m^4 - 4$

5. $2 + b + b^2 = 2 + b^3$

6. $3 - b^2 + b(b + 2b) = 2b^2 + 3$

7. Copia la expresión que escribiste para el área del piso en Piensa & comenta, en la página 362.

a. Escribe la expresión en la forma más reducida que puedas.

b. ¿Cuántos pies cuadrados de alfombra necesitas, si m mide 6 pies?

c. En Piensa & comenta, evaluaste la expresión de Tamika cuando $m = 6$. Qué fue más fácil, ¿evaluar la expresión de Tamika o tu expresión de la Parte a?

8. Lana y Keenan redujeron $5a^2 + 10 - 4a^2 - 5 + 3a^2$ a $3a^2 + 5$. Lana verificó la respuesta reemplazando 0 por a. Halló que ambas expresiones eran igual a 5 cuando a es 0 y concluyó que son equivalentes.

Keenan preguntó, —¿Pero qué sucede cuando reemplazamos el 2? Al usar $a = 2$, halló que la primera expresión es igual a 21 y que la expresión reducida es igual a 17.

a. ¿Redujeron correctamente Lana y Keenan? Explica.

b. Lana y Keenan probaron la equivalencia de las expresiones al reemplazar el mismo valor en cada expresión, para ver si daban el mismo resultado. ¿Crees que funcionaría la prueba? ¿Qué aprendiste de los resultados de sus pruebas?

MATERIALES

calculadora graficadora

Serie de problemas D

Reduce cada expresión lo más que puedas.

1. $3(x + 1) + 7(2 - x) - 10(2x - 0.5)$

2. $3a + 2(a - 6) + \frac{1}{2}(8 - 4a)$

3. $3y + 9 - (2y - 9) - y$

4. $(x^2 - 7) - 2(1 - x + x^2)$

Recuerda

Restar un número es lo mismo que sumar su opuesto; por ejemplo, $3 - 5 = 3 + {}^{-}5$.

En esta tabla de adición, la expresión en cada celda blanca es la suma de las primeras expresiones en esa fila y columna. Por ejemplo, la suma de a^2 y $a(a - 1)$ es $a^2 + a(a - 1) = a^2 + a^2 - a = 2a^2 - a$.

+	a	$a(a - 1)$
$a - 1$	$2a - 1$	$a^2 - 1$
a^2	$a^2 + a$	$2a^2 - a$

CONTENTS

5. Copia y completa esta tabla hallando las expresiones que faltan.

+		$2a(a - 5)$	$a(2a + 1)$
		$2a^2 - 9a$	
$a(a + 1)$	$a^2 + 2a + 3$		
			$3a^2 + 5a$

6. Al completar la siguiente expresión, crea una expresión que se reduzca a $4x - 3$.

$$3(x^2 + x - 2) + 2(\_\_\_\_\_)$$

7. Lucita y Mikayla están analizando esta ecuación.

$$y = 2x^2 + 5x + 4 - 2(x^2 + 1) - 3x$$

Mikayla dice que es una ecuación cuadrática porque tiene términos x^2. Lucita graficó la ecuación y cree que no es cuadrática.

a. Grafica la ecuación. Basándote en la gráfica, ¿qué tipo de relación parece representar esta ecuación: lineal, cuadrática, cúbica, recíproca, exponencial o alguna otra?

b. ¿Cómo podrías estar seguro del tipo de relación que representa esta ecuación?

Comparte & resume

¡Deja perplejo a tu compañero! Escribe una expresión que se reduzca a una de estas tres expresiones.

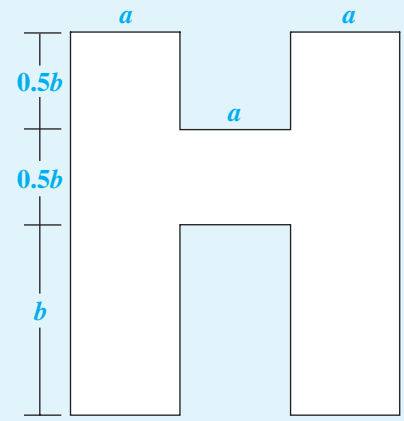
$$3x - 1 \qquad 5x + 2 \qquad 3x^3 - 7x - 2$$

Incluye por lo menos cinco términos en tu expresión, con un máximo de dos términos con números solos e incluye algunos términos con variables elevadas a una potencia. Cuando termines, intercambia con tu compañero y averigua cuál expresión, de las anteriores, es equivalente a la de tu compañero.

Investigación de laboratorio ▶ Haz los cortes

MATERIALES
- papel cuadriculado de 1 cm
- tijeras

En esta forma de la H, a y b son números positivos y los ángulos son todos ángulos rectos.



Analiza la forma H

1. En un papel cuadriculado, traza la forma de una H en que $a = 1$ cm y $b = 2$ cm.
2. Calcula el perímetro y el área de tu forma H.
3. Escribe una expresión algebraica para el perímetro de tu forma H en términos de a y b.
4. Escribe una expresión para el área de tu forma H en términos de a y b.
5. Usa tu expresión de la Pregunta 3 para calcular el perímetro de tu forma H cuando $a = 1$ cm y $b = 2$ cm. ¿Corresponde con la respuesta a la Pregunta 2?
6. Ahora, usa tu expresión de la Pregunta 4 para calcular el área de tu forma H cuando $a = 1$ cm y $b = 2$ cm. ¿Corresponde con la respuesta a la Pregunta 2?

Transforma la forma H

7. Crea una nueva figura, diferente a la forma H, con un área semejante a la de la forma H que se mostró anteriormente, pero con un perímetro diferente.
   - **a.** Traza tu figura.
   - **b.** Escribe una expresión algebraica para el área de tu figura. ¿Es equivalente a la expresión para el área de la forma H, de la Pregunta 4?
   - **c.** Escribe una expresión para el perímetro de tu figura.
   - **d.** La expresión del perímetro de la figura que trazaste probablemente sea muy diferente a la expresión del perímetro para la H. Trata de calcular los valores de a y b para los cuales los perímetros de las dos figuras sean los mismos. Si calculas tales valores, ¿significa que los perímetros de las formas generales son equivalentes? Explica.

8. Ahora considera una figura que tenga el mismo perímetro que la forma H, pero diferente área.

a. Dibuja la figura.

b. Escribe una expresión para el perímetro de tu figura. ¿Es equivalente la expresión para el perímetro de la forma H?

c. Escribe una expresión para el área de tu figura.

d. ¿Hay algunos valores de a y b para los cuales las áreas de las dos figuras sean las mismas? (Para contestar esta pregunta, escribe y resuelve una ecuación.)

Haz un rectángulo

Copia la forma H de la página 366, córtala en trozos y reordena las piezas para formar un rectángulo. Registra las longitudes de los lados de tus trozos en términos de a y b. Necesitarás esta información después.

9. Dibuja el rectángulo que formaste de la forma H y rotula las longitudes de los lados.

Haz una predicción

10. Sin hacer ningún cálculo, piensa en qué se parece el perímetro de la forma H original con el perímetro de tu rectángulo. ¿Son iguales o diferentes?

11. Sin hacer ningún cálculo, piensa en qué se parece el área de la forma H original con el área de tu rectángulo. ¿Son iguales o diferentes?

Verifica tu predicción

12. Escribe una expresión para el perímetro de tu rectángulo en términos de a y b. Verifica tu predicción de la Pregunta 10. ¿Hay valores específicos de a y b que harían los perímetros iguales? ¿Diferentes?

13. Escribe una expresión para el área de tu rectángulo en términos de a y b. Verifica tu predicción de la Pregunta 11. ¿Hay valores específicos de a y b que harían las áreas iguales? ¿Diferentes?

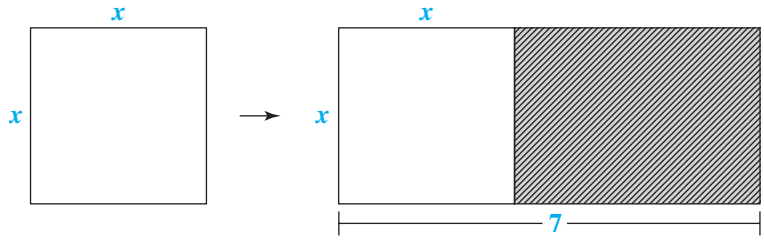
¿Qué aprendiste?

14. Jenny cree que si aumentas el perímetro de una figura, también debes aumentar el área. Escribe una carta para explicarle si tiene razón y por qué. Puedes incluir ejemplos o ilustraciones.

Ejercicios por tu cuenta

Practica & aplica

1. Comienza con un cuadrado cuyo lado mida x cm. Imagina que extiendes la longitud de un lado a 7 cm.



a. ¿Cuál es el área del cuadrado original? ¿Cuál es el área del nuevo rectángulo grande?

b. Usa las áreas que calculaste para escribir una expresión para el área del rectángulo a rayas.

c. Ahora escribe expresiones para el ancho y el largo del rectángulo a rayas.

d. Usa las dimensiones de la Parte c para escribir una expresión para el área del rectángulo a rayas.

e. ¿Qué sugieren tus respuestas a las Partes b y d acerca del desarrollo de $x(7 - x)$?

2. Usa la propiedad distributiva para desarrollar $3x(x - 2)$. Después, traza un diagrama de rectángulo y úsalo como ayuda para explicar por qué las dos expresiones son equivalentes.

Usa la propiedad distributiva para desarrollar cada expresión.

3. $3z(z + 1)$

4. $\frac{1}{2}x(x - 2)$

5. $t(2 - t)$

Haz un diagrama de rectángulo para relacionar cada expresión y úsalo para escribir la expresión en forma factorizada.

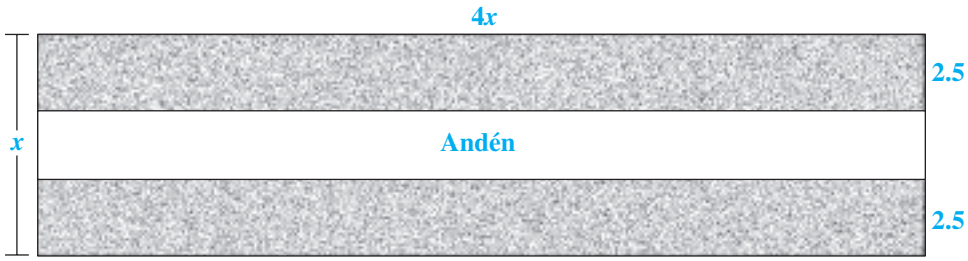
6. $2x^2 + x$

7. $2x^2 - x$

En tus propias palabras

Describe algunos de los pasos que sigues al reducir una expresión algebraica y explica cómo sabes cuándo tienes una expresión en su forma más reducida.

8. Este diagrama muestra el área cubierta de césped entre dos edificios y el andén rectangular en el medio y a lo largo del área. La longitud del área cubierta de césped es cuatro veces su anchura. Los bordes del andén miden 2.5 metros, a partir de los lados del rectángulo.



Escribe dos expresiones para el área del andén, una en forma factorizada y otra en forma desarrollada.

Escribe cada expresión lo más reducida que puedas.

9. $2a(a + 2) - 4a + 3$

10. $n(n + 1) - n$

11. $x(3 - 2x) + 2(x^2 - 4)$

12. $p(3p - 4) - 2(3 - 5p)$

13. $n(n^2 - 1) - n(1 - n)$

14. $q - 3q - 4q(1 - q)$

15. $2(c - 3) + c(c - 2)$

16. $2(c + 3) - c(c - 2)$

Reduce cada expresión e indica si es lineal, cuadrática, cúbica o ninguna de éstas.

17. $p(p + 1) - \frac{2}{p} + 2 + p^2 - \left(1 - \frac{2}{p}\right) - 1$

18. $w(1 - w) + 2w\left(\frac{1}{w}\right) - 2w - (1 - w^2)$

19. $6x - 2(1 + x) + 2\left(\frac{1}{x} - 1\right) - (4x - 1)$

20. Completa esta expresión para crear una expresión que se reduzca a $x + 2$.

$$-4(x + x^2 - 1) + \_\_\_\_\_$$

21. Clasifica estas expresiones en grupos de expresiones equivalentes.

a. $5(x^4 - 1) - 10 - 2x^4 + 5 - 5x^2 + 2x^4 + 2x^2 + 7$

b. $3x^5 + 2x^4 + 3x^2$

c. $5x^5 + 2(x^4 - x^5) - 10 - 2x + 3x^2 + 2x + 3 + 7$

d. $^-3x^2 - 3 + 5x^4$

e. $x + 4 + 5(x + x^2) - 8 + 2x - 10x + 5 - 2x - 5x^2$

f. $3(x^5 + x^2) + 2(x^4 + 3x) - 6x$

Conecta & amplía

Para cada expresión, copia el diagrama y sombrea un área que corresponda a la expresión.

22. $(2x)^2$

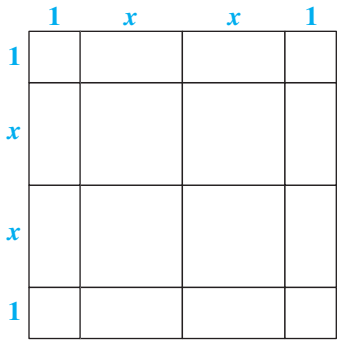
23. $2x^2$

24. $x(2x + 1)$

25. $2x + 2$

26. $(2x + 2)^2$

27. $x(2x + 2)$



Desarrolla cada expresión.

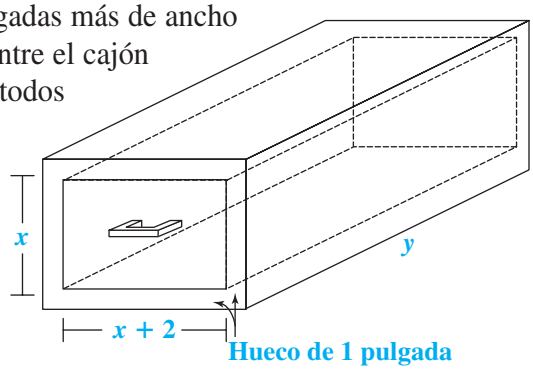
28. $x(a - b + c)$

29. $\frac{k}{7}(21a - 0.7)$

30. $\frac{x}{3}\left(\frac{a}{2} - \frac{b}{3} + \frac{c}{4}\right)$

31. $4w(4w - 2x - 1)$

32. Este diagrama muestra un cajón y el gabinete que lo rodea. El cajón mide 2 pulgadas más de ancho que de alto y hay 1 pulgada entre el cajón y el exterior del gabinete por todos lados. La longitud tanto del cajón como de su gabinete es y.



Escribe dos expresiones equivalentes para el volumen del cajón, una en forma factorizada y una en forma desarrollada.

CONTENTS

33. Ben y Lucita están analizando expresiones algebraicas.

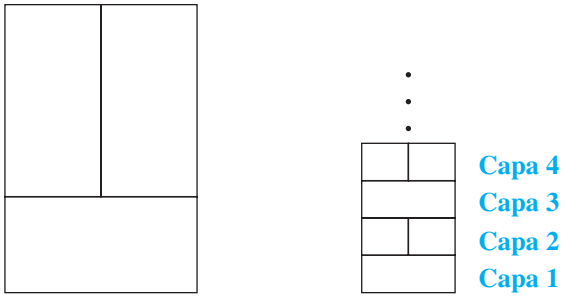
Imagina un cuadrado con lado x, al que se le elimina una franja de 1 cm. Dobla la parte que queda, de orilla a orilla y corta una mitad. Escribe una expresión para el área del trozo que queda.
Pienso que hay dos maneras de hacerlo, dependiendo de la forma en que dobles el papel.
Sí, pero las dos expresiones serán equivalentes.
¡No puede ser! Ni siquiera tienen la misma forma.

a. Después de eliminar la franja de 1 cm, hay dos maneras de doblar el resto del papel. Para cada posibilidad, escribe una expresión para el área del trozo final (después de que el papel se dobló y cortó por la mitad). ¿Son equivalentes estas expresiones? Explica.

b. Ben planteó un nuevo problema: *Imagina un cuadrado con lados de x longitud. Dobla el cuadrado por la mitad, córtalo y bota una mitad. Ahora elimina una franja de 1 cm de la mitad que queda. Escribe una expresión para el área del trozo que queda.*

Lucita dijo que hay dos maneras de interpretar las instrucciones de Ben. Halla las dos maneras y escribe una expresión para cada una. ¿Son equivalentes las dos expresiones? Explica.

34. Un albañil hizo una pila de ladrillos de 16 capas de altura. Cada capa tiene tres ladrillos acomodados en los patrones que se muestran a continuación, a la izquierda. Cada ladrillo es el doble de largo que de ancho y tiene $1\frac{1}{2}$ pulgadas de espesor menos que su ancho.



Vista superior **Vista lateral**

a. ¿Cuántos ladrillos hay en la pila de 16 capas?

b. Escribe una expresión para el volumen de la pila usando w para el ancho de cada ladrillo.

Repaso mixto

35. Halla una ecuación para la recta a través de los puntos (3, 2) y (8, $^-5$).

Haz un bosquejo que muestre la forma general y la ubicación de la gráfica de cada ecuación.

36. $y = x^2 + 3$ **37.** $y = \frac{2}{x}$ **38.** $y = x^3 - 1$

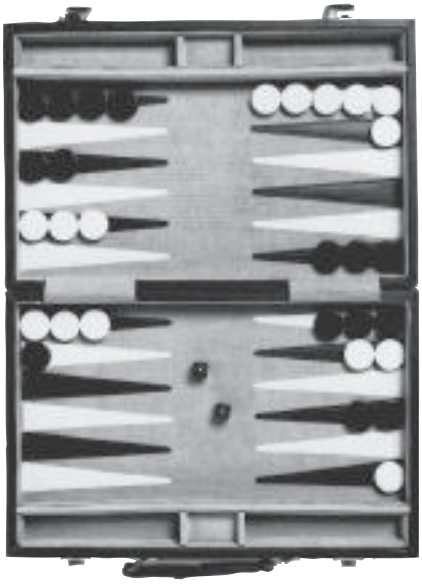
Reduce cada expresión tanto como sea posible.

39. $\sqrt{34}$ **40.** $\sqrt{99x^4}$ **41.** $^-\sqrt{60b}$

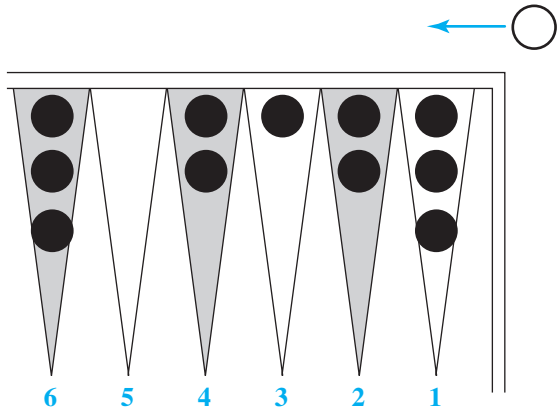
Usa la propiedad distributiva para volver a plantear cada expresión sin paréntesis.

42. $^-(3n - 4)$ **43.** $3p(4 - p)$ **44.** $^-k(^-k - k)$

45. Probabilidad En el juego de backgammon hay dos jugadores, uno con fichas negras y el otro con fichas blancas. Si caen en un espacio ocupado por una ficha opuesta sola, los jugadores pueden eliminar del tablero una de las fichas de su oponente. El oponente puede regresar la ficha al tablero en uno de los seis espacios, si uno de los seis no tiene más de 1 de las fichas del otro primer jugador.



Por ejemplo, en el siguiente tablero, la ficha blanca puede entrar si sale 5 ó 3. Si sale 3, se elimina la ficha negra en ese espacio.



En cada turno, cada jugador lanza dos dados normales.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que la ficha blanca pueda entrar al tablero en este turno? Es decir, ¿cuál es la probabilidad de que salga 5 ó 3 en cualquiera de los dos dados?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que la ficha blanca saque a una ficha negra al entrar? Es decir, ¿cuál es la probabilidad de que salga 3 en cualquiera de los dos dados?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que la ficha blanca *no pueda* entrar al tablero en este turno?

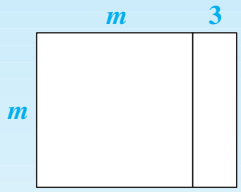
CONTENTS

6.2 Desarrolla productos de binomios

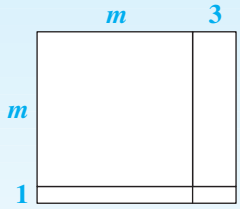
En la Lección 6.1, examinaste diagramas de rectángulo que consistían en un cuadrado con una franja rectangular que se agregaba o quitaba de un lado. ¿Qué ocurrirá si agregas o quitas *dos* franjas rectangulares?

Piensa & comenta

Comienza con un cuadrado con lado de m cm de longitud. Agrega una franja de 3 cm en un lado.



Ahora agrega una franja de 1 cm al lado adyacente del nuevo rectángulo.



¿Cuál es el área del rectángulo grande final? Describe cómo la calculaste. ¿Hay otras maneras de calcular este área?

VOCABULARIO
binomio

En la Lección 6.1, usaste la propiedad distributiva para multiplicar expresiones de las formas $m(m + a)$ y $m(m - a)$. Es decir, calculaste los productos de un número o variable y un binomio. Un **binomio** es la suma o diferencia de dos términos diferentes.

La expresión $x + 5$ es un binomio porque es la suma de dos términos diferentes. De igual manera, $x^2 - 7$ es un binomio; es la diferencia de dos términos que no se pueden combinar en un término.

Expresiones como $x^2 + x - 1$ y x^2 tienen más o menos de dos términos, de modo que no son binomios. La expresión $x + 2x$ no es un binomio tampoco: sus términos son términos semejantes y la expresión es equivalente a $3x$.

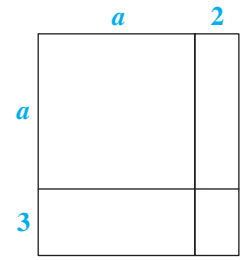
El área final del rectángulo grande en Piensa & comenta es el producto de *dos* binomios: $m + 3$ y $m + 1$. En esta lección, aprenderás a multiplicar dos binomios.

Investigación 1 Usa modelos geométricos para multiplicar binomios

El modelo geométrico que usaste para pensar en cómo multiplicar un término y un binomio, se puede adaptar para multiplicar dos binomios.

Serie de problemas A

1. Observa este rectángulo.

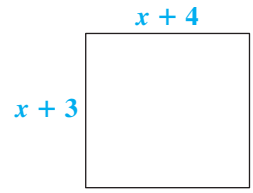


a. Escribe dos expresiones, una para el largo del rectángulo grande y otra para el ancho.

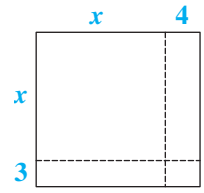
b. Usa tus expresiones para escribir una expresión para el área del rectángulo grande.

c. Usa el diagrama para desarrollar tu expresión para el área del rectángulo grande. Es decir, escribe el área del rectángulo grande sin usar paréntesis.

2. Arturo quería desarrollar $(x + 4)(x + 3)$. Hizo un rectángulo de $x + 4$ unidades de ancho y de $x + 3$ unidades de alto.



Después, trazó líneas para dividir el rectángulo en cuatro partes.



A continuación, Arturo escribió:
Área del rectángulo grande $= (x + 4)(x + 3)$.

Después calculó el área de cada una de las cuatro partes más pequeñas y las usó para escribir otra expresión para el área del rectángulo grande. Finalmente, redujo su expresión combinando términos semejantes. ¿Cuál fue su expresión final?

CONTENTS

3. Para las Partes a, b y c, haz lo siguiente:

- Modela el producto con un diagrama de rectángulo.
- Usa tu diagrama como ayuda para desarrollar la expresión.

a. $(m + 7)(m + 2)$

b. $(w + 2)^2$

c. $(2n + 3)(n + 1)$

4. Cierto rectángulo tiene un área de $y^2 + 6y + 3y + 18$.

a. Haz un diagrama de rectángulo que modele esta expresión.

b. Usa el diagrama como ayuda para volver a plantear la expresión del área como un producto de dos binomios.

5. **Reto** Otro rectángulo tiene un área de $y^2 + 5y + 6$.

a. Haz un diagrama de rectángulo que modele esta expresión.

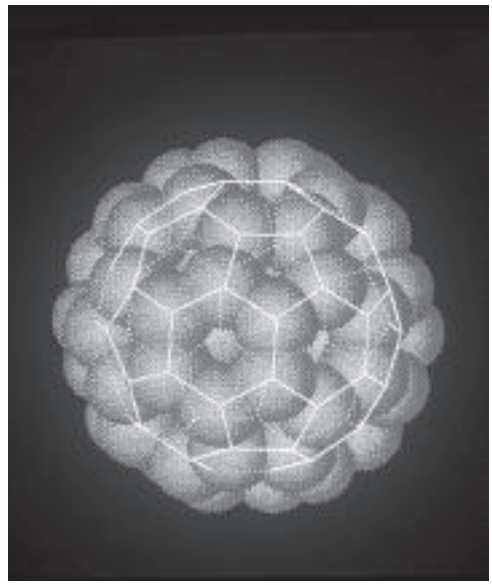
b. Usa el diagrama como ayuda para volver a plantear la expresión del área como el producto de dos binomios.

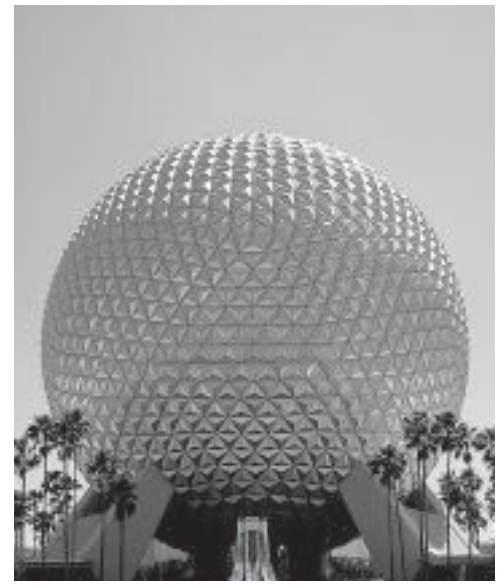
Comparte & resume

Ben cree que $(n + 3)(n + 5) = n^2 + 15$. Muéstrale por qué está equivocado. Incluye un diagrama de rectángulo que modele el desarrollo correcto de $(n + 3)(n + 5)$.

Datos de interés

A la derecha hay un modelo geométrico del carbono-60. Esta molécula se compone de 60 átomos de carbono interconectados, ordenados en 12 pentágonos y 20 hexágonos. Debido a su semejanza estructural al domo geodésico (que se muestra a la extrema derecha), diseñado por el arquitecto estadounidense R. Buckminster Fuller; se le llamó *buckminsterfulereno.*

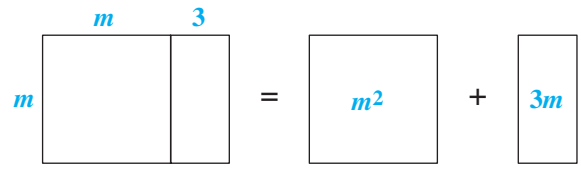




Investigación 2 Multiplica binomios que presenten adición

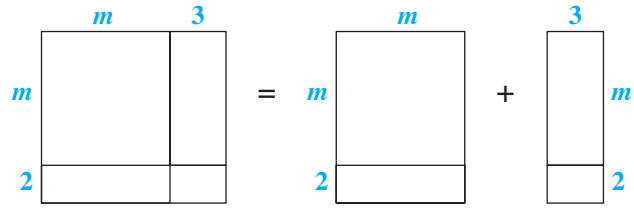
Los modelos de rectángulo te pueden ayudar a entender cómo funciona la propiedad distributiva. Por ejemplo, a continuación se usa la propiedad distributiva y un diagrama de rectángulo para desarrollar la expresión $m(m + 3)$.

$$\begin{aligned} m(m + 3) &= m \cdot m + m \cdot 3 \\ &= m^2 + 3m \end{aligned}$$



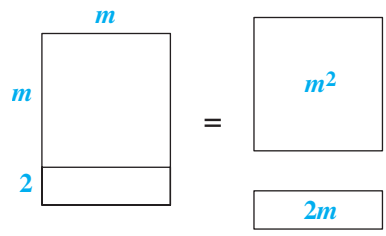
También puedes usar la propiedad distributiva y los diagramas de rectángulo para desarrollar expresiones como $(m + 2)(m + 3)$. Sólo piensa en $m + 2$ de la misma manera en que pensaste acerca de la primera variable m en la expresión $m(m + 3)$ anterior. Es decir, multiplica $m + 2$ por cada término en $m + 3$:

$$\begin{aligned} (m + 2)(m + 3) &= (m + 2) \cdot m + (m + 2) \cdot 3 \\ &= m(m + 2) + 3(m + 2) \end{aligned}$$



Entonces, la propiedad distributiva se puede usar para reducir cada término. Comienza reduciendo el primer término, $m(m + 2)$:

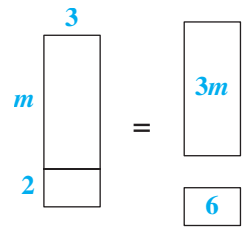
$$\begin{aligned} m(m + 2) &= m \cdot m + m \cdot 2 \\ &= m^2 + 2m \end{aligned}$$



CONTENTS

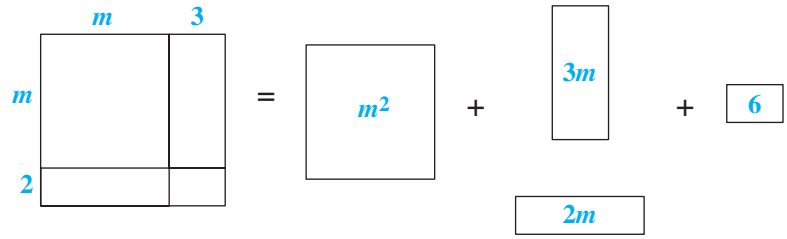
Y después reduce el segundo término, $3(m + 2)$:

$$\begin{aligned} 3(m + 2) &= 3 \cdot m + 3 \cdot 2 \\ &= 3m + 6 \end{aligned}$$



Finalmente, junta todo y combina términos semejantes:

$$\begin{aligned} (m + 2)(m + 3) &= m(m + 2) + 3(m + 2) \\ &= m^2 + 2m + 3m + 6 \\ &= m^2 + 5m + 6 \end{aligned}$$



Serie de problemas B

Para cada problema, haz lo siguiente:

- Desarrolla la expresión usando la propiedad distributiva.
- Haz un diagrama de rectángulo para modelar la expresión y verificar tu desarrollo.

1. $(x + 3)(x + 4)$

2. $(k + 5)^2$

3. $(x + a)(x + b)$

Serie de problemas C

1. Completa la tabla reemplazando el valor de x en esta ecuación.

$$y = x(x + 1) - 3(x + 1)(x + 2) + 3(x + 2)(x + 3) - (x + 3)(x + 4)$$

x	0	1	2	3	4	5
y						

2. Haz una conjetura acerca del valor de y para otros valores de x. Prueba tu conjetura con otros números; incluye algunos decimales y números negativos. Revisa tu conjetura si es necesario.

3. **¡Pruébalo!** Usa tu conocimiento sobre el desarrollo de productos de binomios para mostrar que tu conjetura es verdadera.

Comparte & resume

Usa la propiedad distributiva para desarrollar $(a + b)(c + d)$. Haz un diagrama de rectángulo y explica cómo muestra que tu desarrollo es correcto.

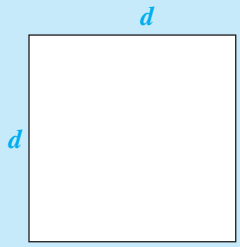
Investigación 3 Multiplica binomios que presenten sustracción

Has usado modelos de rectángulo para pensar en cómo multiplicar binomios que presenten expresiones con adiciones en la forma $(a + b)(c + d)$. Ahora aprenderás a desarrollar productos de binomios que presenten sustracciones.

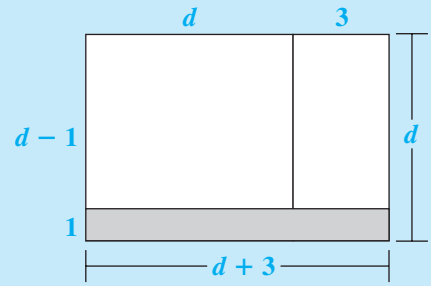
EJEMPLO

Aquí hay una manera de crear un diagrama de rectángulo para representar $(d - 1)(d + 3)$.

Primero haz un cuadrado con lado de longitud d.



Después resta una franja de 1 cm de un lado y agrega una franja de 3 cm en el lado adyacente.



El rectángulo sin sombrear que queda tiene un área de $(d - 1)(d + 3)$.

CONTENTS

Piensa & comenta

Desarrolla la expresión $(d - 1)(d + 3)$, usa ya sea la propiedad distributiva o el diagrama del ejemplo de la página 378. Describe cómo hallaste la respuesta.

Serie de problemas D

Para cada expresión que sigue, haz lo siguiente:

- Desarrolla la expresión usando la propiedad distributiva.
- Haz un diagrama de rectángulo que represente la expresión. Sombrea las áreas para indicar que se están eliminando.
- Usa tu diagrama para verificar que el desarrollo es correcto.

1. $(b - 2)(b + 3)$

2. $(a + 1)(a - 4)$

3. $(2 + e)(3 - e)$

4. Cierto rectángulo tiene un área de $y^2 + 5y - 2y - 10$.

a. Haz un diagrama de rectángulo que represente esta expresión.

b. Escribe el área de este rectángulo como un producto de dos binomios.

Ahora usarás la propiedad distributiva para desarrollar productos de dos binomios en los que ambos implican adición.

Serie de problemas E

Desarrolla cada expresión, usa la propiedad distributiva y después combina términos semejantes. Tu respuesta final no debe contener paréntesis ni términos semejantes.

1. $(x - 4)(x - 5)$

2. $(R - 2)^2$

3. $(2 - f)(3 - f)$

4. $(a - 2b)(3a - b)$

Ahora aplicarás lo que has aprendido acerca del desarrollo de productos de binomios para analizar algunos trucos con números.

Serie de problemas F

Recuerda

Un *contraejemplo* es un ejemplo para el cual no funciona una conjetura.

Lydia cree que encontró algunos trucos con números.

¡Pruébalo! En los Problemas 1 y 2, determina si el truco de Lydia funciona realmente. Si así es, pruébalo. Si no, da un contraejemplo.

1. Lydia dijo, —Toma cuatro enteros consecutivos cualquiera. Multiplica el número menor y el mayor, después multiplica los dos números que quedan. Si restas el primer producto del segundo, siempre obtendrás 2.

Por ejemplo, para los enteros 3, 4, 5 y 6, los productos del número menor y el mayor, 3 y 6, es 18. Los productos de los dos números restantes, 4 y 5 es 20. La diferencia entre estos productos es 2. (Ayuda: Si el entero menor es x, ¿cuáles son los otros tres enteros?)

2. Lydia dijo, —Toma tres enteros consecutivos cualquiera y multiplícalos. Su producto es divisible entre 4. Por ejemplo, el producto de 4, 5 y 6 es 120, lo cual es divisible entre 4.

3. Éste es otro truco con números que propuso Lydia: —Toma cualesquiera dos enteros pares consecutivos; multiplícalos y súmales 1. El resultado es siempre un cuadrado perfecto. Por ejemplo, 4 y 6 se multiplican para dar 24; se suma 1 para obtener 25, lo cual es un cuadrado perfecto.

a. Como ambos números son pares, tienen 2 como factor. Supón que el número menor es $2x$. ¿Cuál es el número mayor?

b. Usa $2x$ y la expresión que escribiste en la Parte a, para hallar la expresión resultante, la cual Lydia dice que es siempre un cuadrado perfecto.

c. Suponte que el resultado en la Parte b es un cuadrado perfecto. Trata de hacer un diagrama de rectángulo que muestre el binomio que se puede elevar al cuadrado para obtener ese producto.

d. ¿Qué binomio se eleva al cuadrado en la Parte c?

e. ¿Has probado que el truco de Lydia funciona siempre? Explica.

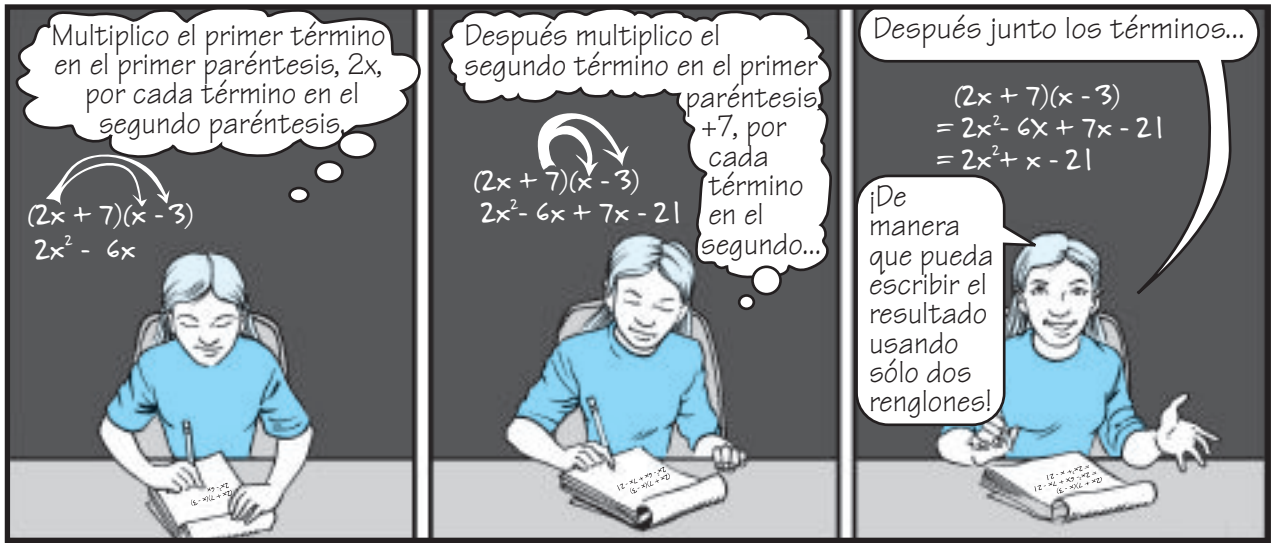
Comparte & resume

Usa la propiedad distributiva para desarrollar $(a - b)(c + d)$. Después haz un diagrama de rectángulo para mostrar por qué tu desarrollo es correcto.

Investigación 4 Atajos para multiplicar binomios

Has estado usando la propiedad distributiva y diagramas de rectángulo para pensar en cómo multiplicar dos binomios. ¿Has notado algún patrón en tus cálculos? En esta investigación, analizarás patrones que te pueden ayudar a multiplicar binomios rápida y eficazmente.

Ésta es la forma en que Mikayla multiplicó $(2x + 7)(x - 3)$.


Multiplico el primer término en el primer paréntesis, 2x, por cada término en el segundo paréntesis.
(2x + 7)(x - 3)
2x² - 6x
Después multiplico el segundo término en el primer paréntesis, +7, por cada término en el segundo...
(2x + 7)(x - 3)
2x² - 6x + 7x - 21
Después junto los términos...
(2x + 7)(x - 3)
= 2x² - 6x + 7x - 21
= 2x² + x - 21
¡De manera que pueda escribir el resultado usando sólo dos renglones!

Serie de problemas G

Usa el método de Mikayla para multiplicar cada par de binomios.

1. $(y + 6)(y - 3)$

2. $(p + 4)(p + 3)$

3. $(t - 11)(t - 3)$

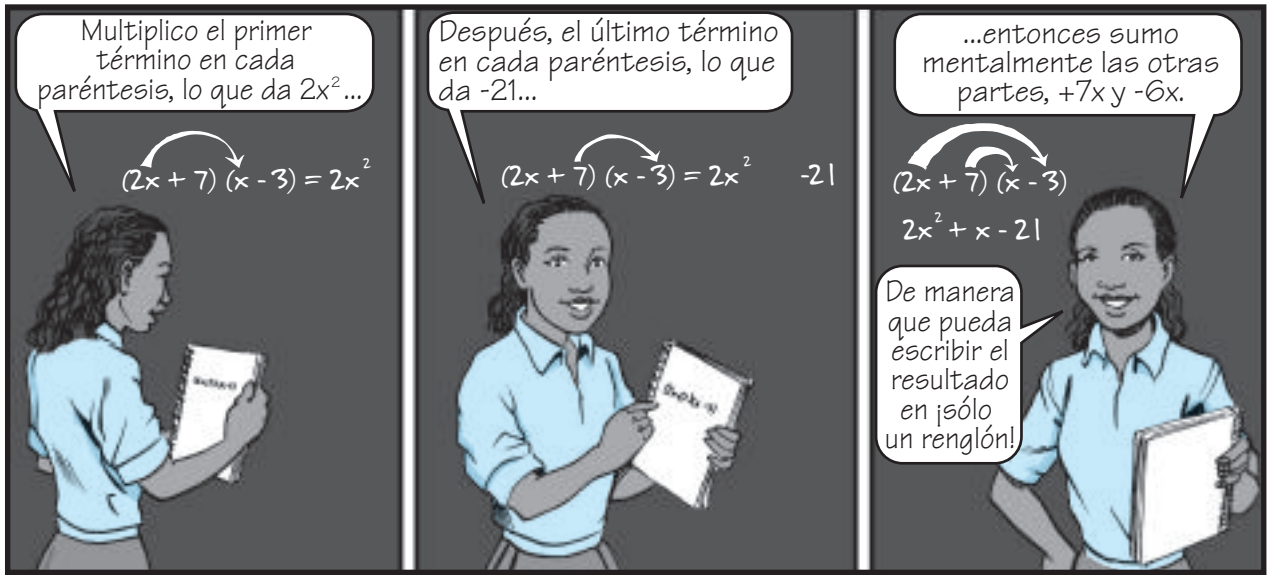
4. $(2x + 1)(3x + 2)$

5. $(2n + 3)(2n - 3)$

Piensa & comenta

¿Por qué funciona el método de Mikayla?

He aquí la forma como Tamika aborda estos problemas.


Multiplico el primer término en cada paréntesis, lo que da $2x^2$...
$(2x + 7)(x - 3) = 2x^2$
Después, el último término en cada paréntesis, lo que da -21...
$(2x + 7)(x - 3) = 2x^2$ -21
...entonces sumo mentalmente las otras partes, +7x y -6x.
$(2x + 7)(x - 3)$
$2x^2 + x - 21$
De manera que pueda escribir el resultado en ¡sólo un renglón!

Serie de problemas H

Usa el método de Tamika para multiplicar cada par de binomios.

1. $(y + 7)(y - 4)$

2. $(p + 1)(p - 5)$

3. $(t - 4)(t - 4)$

4. $(2x - 1)(x - 2)$

5. $(3n + 2)(2n - 3)$

Piensa & comenta

¿Por qué funcionó el método de Tamika?

En la siguiente serie de problemas, aplicarás lo que has aprendido acerca de cómo desarrollar binomios.

Serie de problemas

Para cada ecuación, realiza las Partes a y b.

a. Decide si la ecuación es verdadera para todos los valores de x, para algunos, pero no todos los valores de x o para ningún valor de x.

b. Explica cómo sabes que tu respuesta es correcta. Si la ecuación es verdadera para algunos pero no todos los valores de x, indica qué valores la hacen verdadera.

1. $(x - 2)(x - 3) = 0$

2. $(x + 3)(x + 2) = x^2 + 5x + 6$

3. $(x - b)^2 = x^2 - 2xb + b^2$

4. $(x + 3)(x - 1) = x^2 + 2x + 3$

5. $(x - 3)(x + 3) = x^2 - 6x - 9$

6. Brian piensa que ha encontrado algunos patrones de números en un calendario. Dice que sus patrones funcionan para cualquier cuadro de 2 por 2 en un calendario, como los tres que se muestran aquí. Decide si cada uno de sus patrones funciona y justifica tus respuestas.

JULIO						
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

a. Calcula el producto de cada diagonal. Su diferencia positiva es siempre 7. Por ejemplo, para el cuadro que contiene 2, 3, 9 y 10, los productos de las diagonales son $2 \cdot 10 = 20$ y $3 \cdot 9 = 27$. Su diferencia es $27 - 20 = 7$.

b. Calcula el producto de cada columna. Su diferencia positiva es siempre 12. Por ejemplo, para el cuadro que contiene 2, 3, 9 y 10, los productos de las columnas son $2 \cdot 9 = 18$ y $3 \cdot 10 = 30$. Su diferencia es $30 - 18 = 12$.

c. Calcula los productos de cada fila. Su diferencia es siempre par. Por ejemplo, para el cuadro que contiene 2, 3, 9 y 10, los productos de las filas son $2 \cdot 3 = 6$ y $9 \cdot 10 = 90$. Su diferencia es $90 - 6 = 84$, lo cual es par.

Comparte & resume

Has visto varios métodos de desarrollar el producto de dos binomios.

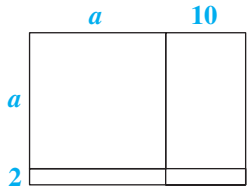
1. Selecciona el método que más te guste y explica cómo usarlo para desarrollar $(2x + 3)(x - 1)$.

2. ¿Por qué te gusta el método que seleccionaste?

Ejercicios por tu cuenta

Practica & aplica

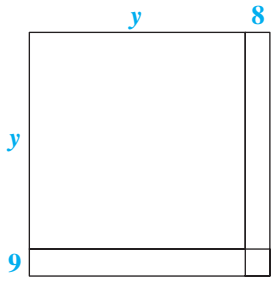
1. Este diagrama muestra un rectángulo con área de $(a + 10)(a + 2)$.



a. Escribe una expresión para el área de cada una de las cuatro regiones.

b. Usa tu respuesta de la Parte a para desarrollar la expresión para el área del rectángulo grande. Es decir, expresa el área sin usar paréntesis. Reduce tu respuesta combinando términos semejantes.

2. Este diagrama muestra un rectángulo con área de $(y + 9)(y + 8)$.



a. Escribe una expresión para el área de cada una de las cuatro regiones.

b. Usa tu respuesta de la Parte a para desarrollar la expresión para el área del rectángulo grande. Es decir, expresa el área sin usar paréntesis. Reduce tu respuesta combinando términos semejantes.

Haz un diagrama de rectángulo para modelar cada producto y después usa tu diagrama para desarrollar el producto. Reduce tu respuesta combinando términos semejantes.

3. $(3 + 2k)(4 + 3k)$

4. $(1 + 4x)(x + 2)$

5. Cierto rectángulo tiene un área de $y^2 + 5y + 2y + 10$.

a. Haz un diagrama de rectángulo que modele esta expresión.

b. Usa el diagrama como ayuda para volver a plantear la expresión del área como el producto de dos binomios.

6. Cierto rectángulo tiene un área de $2y^2 + 6y + y + 3$.

a. Haz un diagrama de rectángulo que modele esta expresión.

b. Usa el diagrama como ayuda para volver a plantear la expresión del área como el producto de dos binomios.

7. Considera la expresión $(p + 3)(p + 5)$.

a. Usa la propiedad distributiva para desarrollar la expresión.

b. Haz un diagrama de rectángulo para modelar la expresión y verificar tu desarrollo.

Usa la propiedad distributiva para desarrollar cada expresión.

8. $(1 + 3a)(5 + 10a)$

9. $3\left(2x + \frac{1}{3}\right)(x + 2) - (x + 3)(1 + x)$

10. $\left(s + \frac{1}{4}\right)(3s + 1) - \left(\frac{1}{4} + s\right)(1 + s)$

Haz un diagrama de rectángulo para modelar cada producto. Después, usa tu diagrama para desarrollar el producto. Reduce tu respuesta combinando términos semejantes.

11. $(x + 3)(x - 3)$

12. $(p - 4)(3p + 2)$

13. Considera la expresión $(h - 2)(h + 2)$.

a. Usa la propiedad distributiva para desarrollar la expresión.

b. Haz un diagrama de rectángulo que represente la expresión. Sombrea las áreas que se están eliminando. Usa tu diagrama para verificar que tu desarrollo es correcto.

Usa la propiedad distributiva para desarrollar cada expresión.

14. $(x - 7)(x - 2)$

15. $(3 - g)(4 - g)$

16. $(4 - 2p)(4 - p)$

17. $(2w + 1)(w - 6)$

18. $(1 - 5q)(2 + 2q)$

19. $(3v - 5)(v + 1)$

20. Cierto rectángulo tiene un área de $y^2 - 4y + 8y - 32$.

a. Haz un diagrama de rectángulo que represente esta expresión.

b. Usa el diagrama como ayuda para volver a plantear la expresión del área como producto de dos binomios.

21. **Reto** Cierto rectángulo tiene un área de $2y^2 + 4y - 3y - 6$.

a. Haz un diagrama de rectángulo que represente esta expresión.

b. Usa el diagrama como ayuda para volver a plantear la expresión del área como el producto de dos binomios.

¡Pruébalo! Determina si cada uno de los siguientes trucos con números funciona. De ser así, pruébalo. Si no, da un contraejemplo.

22. Toma tres números consecutivos cualquiera. Multiplica el menor y el mayor. Su producto es igual al cuadrado del número del medio, menos 1.

23. Piensa en dos números impares consecutivos cualesquiera. Eleva al cuadrado ambos números y resta el resultado del menor del resultado del mayor. El resultado es siempre divisible entre 6.

Desarrolla cada expresión. Reduce tu desarrollo si es posible.

24. $(4x + 1)(4x - 1)$

25. $(r - 12)(r - 12)$

26. $(2x + 2)(x - 2)$

27. $(4x + 1)^2$

28. $(5M + 5)^2$

29. $(n + 1)^2 + (n - 1)^2$

Decide si la ecuación es verdadera para todos los valores de x, para algunos, pero no todos los valores de x o para ningún valor de x.

30. $(x + 3)(x - 4) = x^2 + 7x - 12$

31. $(2x + 1)(x - 1) = 2x^2 - x - 1$

32. $(3x + 1)(3x - 1)x = 9x^3 - x - 1$

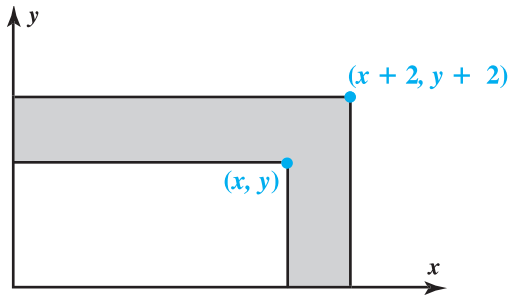
JULIO						
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

33. Después de trabajar con los problemas del calendario en la Serie de problemas I, Chapa escribió uno:—Selecciona un bloque de tres fechas en una columna (de manera que todos estén en el mismo día de la semana). Eleva al cuadrado la fecha del medio y resta el producto de la primera y la última fecha. El resultado es siempre 49.

¿Funciona siempre el truco de Chapa? De ser así, muestra por qué. Si no, da un contraejemplo.

Conecta & amplía

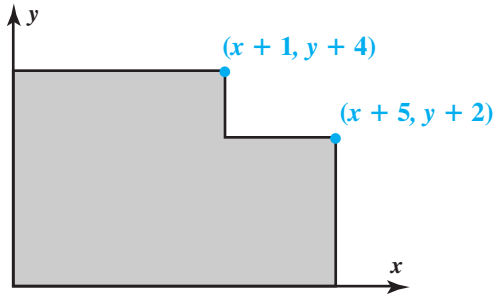
34. Considera esta gráfica.



a. Escribe una expresión para el área de la región no sombreada.

b. Escribe dos expresiones, una con paréntesis y otra sin ellos, para el área de la región sombreada.

35. Escribe una expresión para el área de la región sombreada en esta gráfica.



Desarrolla cada expresión. Reduce tus resultados combinando términos semejantes.

36. $(1 + x^2)(x + y) + (1 + y)(x + y) - x^2(x + y) - xy$

37. $2(x + y) + x(3 + y)(x + 2)$

CONTENTS

En tus propias palabras

Explica por qué $(x + a)(x + b) \neq x^2 + ab$. Usa tanto un diagrama de rectángulo como la propiedad distributiva.

Un *trinomio* es una expresión con tres términos diferentes. Desarrolla los siguientes productos de un trinomio por un binomio. Un diagrama de rectángulo te puede ser de utilidad.

38. $(x + y + 1)(x + 1)$

39. $(a + b + 1)(a + 2)$

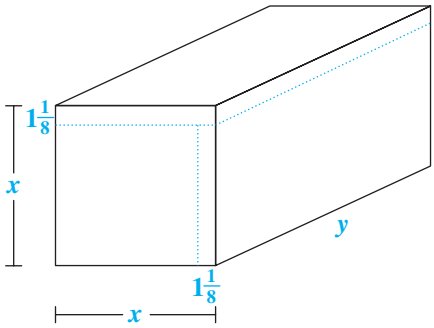
40. $(x + y + 2)(x + 1)$

41. Considera el producto $(2x + y)(x + 2y)$.

a. Desarrolla la expresión usando la propiedad distributiva.

b. Haz un diagrama de rectángulo que represente la expresión. Usa el diagrama para verificar que tu desarrollo sea correcto.

42. Este bloque de madera tiene una longitud y y una base cuadrada con lados de longitud x. Un carpintero corta el bloque de madera dos veces, quitando dos franjas de los lados adyacentes. Cada corte elimina $1\frac{1}{8}$ pulgadas.



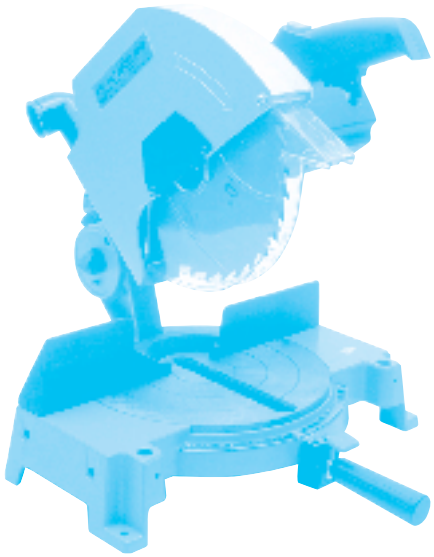
a. Escribe una expresión para el volumen de la madera antes de que se haga cualquier corte.

b. Escribe una expresión, sin paréntesis, para el volumen de la madera después de hacer los cortes.

43. Considera el producto $(2a + 3)(3a - 4)$.

a. Desarrolla y después reduce la expresión.

b. Haz un diagrama de rectángulo para representar la expresión. Usa el diagrama para verificar que tu desarrollo sea correcto.



Desarrolla los siguientes productos de un trinomio por un binomio.

44. $(x + y + 1)(x - 1)$

45. $(x - y - 1)(x + 1)$

46. $(x + y - 2)(x - 1)$

47. Sinopsis Desarrolla y reduce las expresiones de las Partes a, b, c y d.

a. $(x - 3)^2$ **b.** $(x - 4)^2$

c. $(x - 5)^2$ **d.** $(x - a)^2$

e. Busca un patrón relacionado con las formas factorizadas y desarrolladas en las expresiones de las Partes a, b y c. Describe un atajo para desarrollar el cuadrado de la diferencia de un binomio.

48. Considera la expresión $y^2 - 9$.

a. Escribe la expresión como el producto de dos binomios.

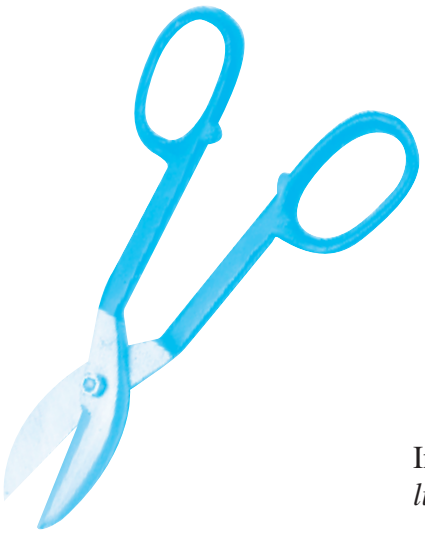
b. Crea un diagrama para ilustrar $y^2 - 9$ como un área rectangular.

Desarrolla y después reduce cada expresión.

49. $(n + 2)^2 - n(n + 4)$

50. $(n + p)^2 - n(n + 2p)$

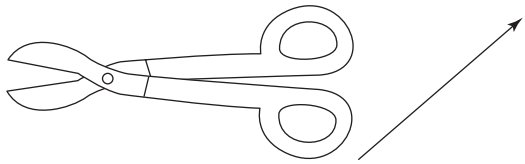
Repaso mixto



Resuelve cada ecuación.

51. $\frac{2x}{3} - 7 = 3$ **52.** $3K + \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$ **53.** $3.2 - 2b = 1.1$

54. Copia la figura y el vector. Traslada la figura usando el vector.



55. Grafica la desigualdad $y > 3x + 2$.

56. Supón que r es un número entre -1 y 0. Ordena estos números del menor al mayor.

$$r \qquad r^{-3} \qquad r^2 \qquad r^3$$

Indica si el patrón en cada tabla se puede describir mejor con una relación *lineal,* una *cuadrática,* una *exponencial* o una *recíproca.*

57.

x	y
-2	6
-1	1
0	-2
1	-3
2	-2

58.

a	b
-3	-4
-1	-12
1	12
3	4
5	2.4

59.

s	n
-2	$0.\overline{1}$
-1	$0.\overline{3}$
0	1
1	3
2	9

Resuelve cada proporción.

60. $\frac{8}{3} = \frac{x}{9}$ **61.** $\frac{18}{y} = \frac{4}{10}$ **62.** $\frac{9.2}{3.6} = \frac{2.3}{w}$

63. Economía Cuando los estudiantes empiezan a asistir a la universidad, por lo general, reciben solicitudes de tarjetas de crédito. Algunos estudiantes usan las tarjetas de crédito para amueblar o decorar sus dormitorios o departamentos y, se endeudan rápidamente. Desafortunadamente, las tarjetas de crédito con frecuencia tienen tasas de interés muy altas.

Supón que Jay carga $2,000 por equipo electrónico y libros a una tarjeta de crédito que tiene una tasa de interés del 18% por año, lo cual es 1.5% por mes.

a. Si Jay no paga nada de los $2,000, ¿cuánto interés se agregará a su cuenta a fin de mes?

b. Jay cree que puede pagar $100 por mes de su cuenta. Supón que continúa con este plan y no hace más cargos a su cuenta. (¡Ésa puede ser una gran suposición!) Copia y completa las tablas para mostrar cuánto debe todavía después de 6 meses. El interés agregado cada mes se basa en la proporción no pagada en la cuenta del mes anterior.

Mes	Saldo	Interés agregado	Cantidad pagada	Nuevo saldo
1	$2,000.00	—	$100.00	$1,900.00
2	1,900.00		100.00	
3			100.00	

c. ¿Cuánto dinero pagó Jay a la compañía de su tarjeta de crédito?

d. ¿En cuánto ha disminuido Jay la deuda original de $2,000?

e. ¿Cuánto dinero ha pagado Jay de interés?

6.3 Patrones en los productos de binomios

Has aprendido varios métodos para desarrollar los productos de binomios. Algunos binomios tienen productos con patrones identificables. El reconociento de estos patrones te facilitará tu trabajo.

Explora

Desarrolla y reduce cada producto.

$(x + 1)^2 = (x + 1)(x + 1) =$

$(x + 2)^2 =$

$(x + 3)^2 =$

$(x + 4)^2 =$

Describe el patrón que ves en tu trabajo. Usa los patrones para predecir el desarrollo de $(x + 10)^2$.

Verifica tu predicción para desarrollar y reducir $(x + 10)^2$.

Investigación 1 Eleva binomios al cuadrado

En esta investigación, aprenderás algunos atajos para desarrollar cuadrados de binomios.

Serie de problemas A

1. Aplica los patrones que descubriste en Explora para desarrollar estos cuadrados de binomios.

a. $(m + 9)^2$ **b.** $(m + 20)^2$ **c.** $(m + 0.1)^2$

2. Aplica el patrón para predecir el desarrollo de $(x + a)^2$. Verifica tu respuesta usando la propiedad distributiva.

CONTENTS

3. Usa el patrón que descubriste para explicar, sin hacer ningún cálculo, por qué $100^2 \neq 93^2 + 7^2$. ¿Es 100^2 mayor que o menor que $93^2 + 7^2$?

4. En el Problema 3, viste que $(93 + 7)^2 \neq 93^2 + 7^2$. ¿Existe cualquier valor de x o de a para los cuales $(x + a)^2$ *sean* iguales a $x^2 + a^2$? De ser así, ¿cuáles son? ¿Cómo lo sabes?

Acabas de estudiar expresiones de la forma $(a + b)^2$. A continuación analizarás expresiones de la forma $(a - b)^2$.

Serie de problemas B

1. Recuerda que $(x - 1)^2$ se puede considerar como $(x + {}^-1)^2$.
   - **a.** Usa este hecho, junto con tus hallazgos en la Serie de problemas A, para desarrollar $(x - 1)^2$.
   - **b.** Verifica tu respuesta de la Parte a usando la propiedad distributiva para desarrollar $(x - 1)^2$.
2. Desarrolla cada expresión usando el método que prefieras.
   - **a.** $(m - 9)^2$ **b.** $(m - 20)^2$ **c.** $(m - 0.1)^2$
3. ¿Cuál es el desarrollo de $(x - a)^2$?
4. Usa un diagrama de rectángulo para explicar tu respuesta al Problema 3.

Hasta ahora has visto que estos dos enunciados son verdaderos:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Las variables a y b pueden representar cualquier expresión. Por ejemplo:

$$(2x + 3y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$$

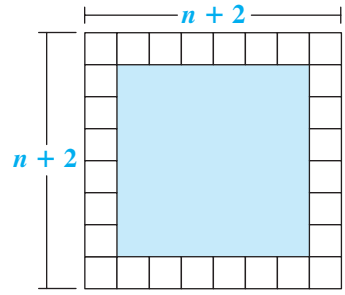
Serie de problemas C

Desarrolla cada expresión.

1. $(3m + 2)^2$
2. $(2x - y)^2$
3. $(2m - 4n)^2$
4. **Reto** $(g^2 - a^4)^2$

CONTENTS

5. Imagina un jardín cuadrado rodeado por un borde de baldosas cuadradas que miden 1 unidad por 1 unidad. Es posible una variedad de tamaños.



a. El jardín tiene lados de longitud n, sin incluir las baldosas, en donde n es divisible entre la longitud de la baldosa. Escribe una expresión para el área de la tierra cubierta tanto por el jardín como por las baldosas.

b. Escribe una expresión para el número de baldosas que se necesitan para el jardín de la Parte a.

6. **¡Pruébalo!** Evan notó que cuando calculó la diferencia entre 3^2 y 4^2, el resultado fue impar: $16 - 9 = 7$. Esto también es verdadero para la diferencia de 6^2 y 7^2: $49 - 36 = 13$. Hizo la conjetura de que la diferencia de cuadrados de números consecutivos es siempre impar.

Prueba la conjetura de Evan, si es posible. Si no, da un contraejemplo.

Comparte & resume

Bharati está confundida acerca de cómo elevar un binomio al cuadrado. Ella cree que para cualquier número a y b,

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 \text{ y } (a - b)^2 = a^2 - b^2$$

Escríbele una carta que explique por qué ella está equivocada. Incluye los desarrollos correctos de $(a + b)^2$ y $(a - b)^2$ en tu carta.

Investigación 2 Diferencias de cuadrados

En la Investigación 1, usaste un atajo para desarrollar cuadrados de binomios como $(a + b)^2$ y $(a - b)^2$. En esta investigación, hallarás un atajo para un tipo diferente de producto de binomios.

Serie de problemas D

1. Desarrolla cada expresión.

a. $(x + 10)(x - 10)$ **b.** $(k + 3)(k - 3)$

c. $(S + 1)(S - 1)$ **d.** $(x + 5)(x - 5)$

e. $(2t + 5)(2t - 5)$ **f.** $(3y - 7)(3y + 7)$

2. ¿En qué se parecen los factores de los productos originales del Problema 1?

3. ¿En qué se parecen los desarrollos de los productos del Problema 1?

4. **¡Pruébalo!** Desarrolla $(x + a)(x - a)$ y muestra que el patrón que notaste en el Problema 3 será siempre verdadero para este tipo de producto.

5. Si la expresión se ajusta al patrón de productos del Problema 1, desarróllala usando el patrón que describiste en el Problema 3. Si no se ajusta al patrón, escríbelo.

a. $(x + 20)(x - 20)$

b. $(b + 1)(b - 1)$

c. $(n - 2.5)(n - 2.5)$

d. $\left(2m - \frac{1}{2}\right)\left(m + \frac{1}{2}\right)$

e. $(J + 0.2)(J - 0.2)$

f. $(z + 25)(z - 100)$

g. $\left(2n - \frac{1}{3}\right)\left(2n + \frac{1}{3}\right)$

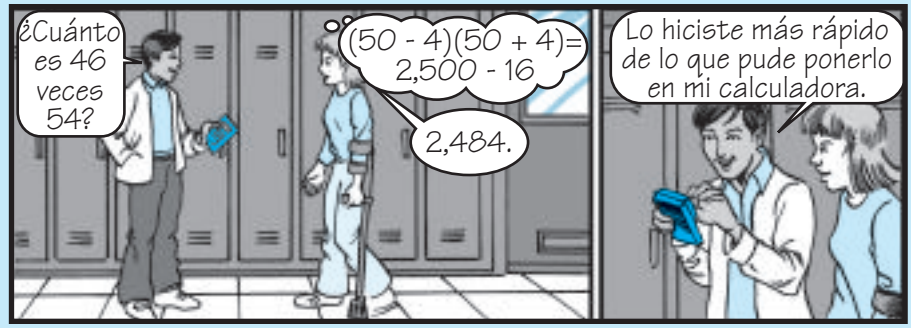
h. $(3 - p)(3 + p)$

6. Halla dos binomios con un producto de $x^2 - 49$.

7. Algunos llaman a las expresiones desarrolladas que escribiste en los Problemas 1 y 5 *diferencias de cuadrados*. Explica por qué tiene sentido este nombre.

EJEMPLO

El atajo que hallaste en la Serie de problemas D puede ayudarte a hacer algunos cálculos que parecen difíciles con asombrosa rapidez.



Serie de problemas E

1. Muestra cómo usar el método de Lydia para calcular $99 \cdot 101$ sin usar la calculadora.

Usa una diferencia de cuadrados para calcular cada producto. Verifica los primeros hasta que te sientas seguro de que lo estás haciendo correctamente.

2. $49 \cdot 51$

3. $28 \cdot 32$

4. $43 \cdot 37$

5. $35 \cdot 25$

6. $4.1 \cdot 3.9$

7. $^{-}14 \cdot 16$

¿Para cuáles de los siguientes productos crees que usar una diferencia de cuadrados sería un método de cálculo razonable? Si parece razonable, calcula el producto.

8. $41 \cdot 38$

9. $99 \cdot {}^{-}101$

10. $10\frac{1}{4} \cdot 9\frac{3}{4}$

11. $1.2 \cdot {}^{-}0.7$

12. Piensa acerca de los productos para lo cuales sería útil usar las diferencias de cuadrados.

a. Haz un conjunto de tres problemas de multiplicación para los cuales querrías usar una diferencia de cuadrados. ¡Sé audaz! Hazlas tú mismo y anota las respuestas.

b. Da tus problemas a un compañero para que las resuelva mientras que tú resuelves el conjunto de tu compañero. Verifica si estás de acuerdo con las respuestas y que el método funciona bien para esos problemas.

13. Si combinas el método de las diferencias de cuadrados de cálculo rápido con algunos otros trucos matemáticos, puedes hacer aún más cálculos sorprendentes mentalmente.

a. Considera el producto $32 \cdot 29$.

i. Explica por qué $32 \cdot 29 = 31 \cdot 29 + 29$.

ii. Ahora usa el patrón de la diferencia de cuadrados como ayuda para calcular el valor de $31 \cdot 29$.

iii. Finalmente, usa el producto de 31 por 29 para calcular $32 \cdot 29$.

b. Calcula $21 \cdot 18$ mentalmente.

c. ¿Cómo hallaste la respuesta de la Parte b?

Comparte & resume

1. Supón que quieres desarrollar una expresión que contiene dos binomios multiplicados entre sí.

a. ¿Cómo sabes si puedes aplicar el atajo que usaste para desarrollar algunos de los productos en el Problema 5 de la Serie de problemas D? Escribe dos productos no desarrollados para ayudar a mostrar lo que quieres decir.

b. Describe el atajo que usaste para escribir el desarrollo.

2. Tal vez hayas notado que cuando multiplicas dos binomios, algunas veces terminas con otro binomio y otras veces con una expresión con tres términos o un *trinomio*.

a. Inventa un producto de dos binomios que resulte en un binomio.

b. Inventa un producto de dos binomios que resulte en un trinomio.

Ejercicios por tu cuenta

Practica & aplica

Desarrolla y reduce cada expresión.

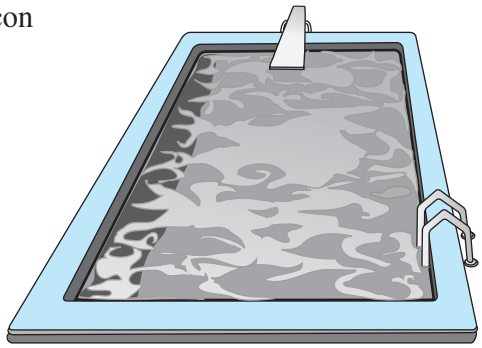
1. $(a + 5)^2$ **2.** $(m + 11)^2$ **3.** $(x + 2.5)^2$

4. $(t - 11)^2$ **5.** $(p - 2.5)^2$ **6.** $(2.5 - k)^2$

7. $\left(q - \frac{1}{4}\right)^2$ **8.** $(g^2 - 1)^2$ **9.** $(s^2 - y^2)^2$

10. $(3f + 2)^2$ **11.** $(3x + y)^2$ **12.** $(3m - 2n)^2$

13. Imagina una piscina rectangular con el fondo hecho de baldosas cuadradas grandes. La piscina tiene 25 baldosas más de largo que de ancho. Alrededor de la orilla, en la parte de arriba de la piscina, el borde está hecho de las mismas baldosas cuadradas de una baldosa de ancho.



a. Sea n el número de baldosas a lo ancho del fondo de la piscina. Escribe una expresión para el número total de baldosas en el fondo de la piscina.

b. Escribe una expresión para el número de baldosas en el fondo de la piscina y en el borde.

Desarrolla y reduce cada expresión.

14. $(10 - k)(10 + k)$ **15.** $(3h - 5)(3h + 5)$

16. $(0.4 - 2x)(0.4 + 2x)$ **17.** $\left(\frac{1}{5} + k\right)\left(\frac{1}{5} - k\right)$

Escribe cada expresión como el producto de binomios.

18. $4x^2 - 1$ **19.** $16 - 25x^2$ **20.** $x^2 - y^2$

Escribe cada producto como una diferencia de cuadrados y usa esta forma para calcular el producto.

21. $35 \cdot 45$ **22.** $27 \cdot 33$

23. $207 \cdot 193$ **24.** $111 \cdot 89$

Mira retrospectivamente tu trabajo del Problema 13 de la Serie de problemas E, en la página 395. Combina el método de la diferencia de cuadrados con adición para calcular cada producto.

25. $12 \cdot 9$ **26.** $37 \cdot 25$

Conecta & amplía

Desarrolla y reduce cada expresión.

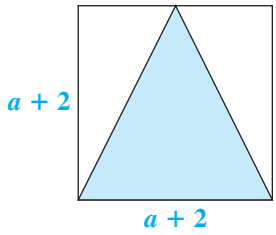
27. $\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right)^2$

28. $(3 - xy)^2$

29. $(xy - x)^2$

30. $(2xy - 1)^2 + (2xy - y)^2$

31. Escribe una expresión sin paréntesis para el área del triángulo sombreado.



32. Reto ¿Para cuáles valores de x y a es $(x + a)^2 > x^2 + a^2$? Justifica tu conclusión. (Ayuda: Desarrolla la expresión del lado izquierdo de la desigualdad.)

Desarrolla y reduce cada expresión.

33. $(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)$

34. $(1 - y^3)(1 + y^3)$

35. $(xy - x)(xy + x)$

Calcula los valores de a y b que hacen verdadera cada ecuación.

36. $2x^2 + 7x + 3 = (a + bx)(3 + x)$

37. $20 - x - x^2 = (a + x)(b - x)$

38. $21 - 23x + 6x^2 = (3 - ax)(7 - bx)$

39. Ciencia física Se lanza un cuerpo hacia arriba a una altura de 4 pies por encima del suelo. La velocidad inicial del cuerpo es de 30 pies por segundo. La ecuación relacionada con la altura del cuerpo, en pies, y el tiempo t, en segundos, desde que se soltó es $h = 30t - 16t^2 + 4$.

a. Calcula a y b para hacer verdadera esta ecuación:

$$30t - 16t^2 + 4 = (2 - t)(a + bt)$$

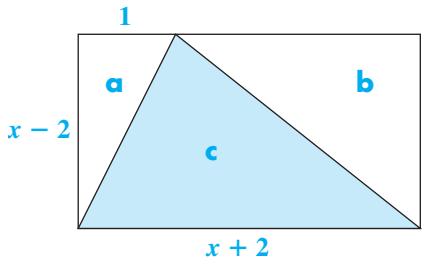
b. El enunciado $xy = 0$ es verdadero siempre que uno de los factores, x o y, sea igual a 0. Por ejemplo, las soluciones para $(k - 1)(k + 2) = 0$ son 1 y $^-2$, porque estos valores hacen los factores $k - 1$ y $k + 2$ igual a 0. Usa este hecho y tu resultado de la Parte a para hallar dos soluciones para la ecuación $30t - 16t^2 + 4 = 0$.

c. Una de tus soluciones te indica a qué hora el cuerpo caerá al suelo. ¿Qué solución es ésta y cómo lo sabes?

En tus propias palabras

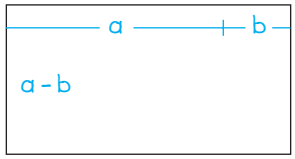
Escribe dos problemas de multiplicación que parezcan difíciles, pero que puedas resolver con facilidad mentalmente usando diferencias de cuadrados. Explica cómo el uso de las diferencias de cuadrados puede ayudarte a calcular los productos.

40. Este rectángulo se divide en tres regiones triangulares. Halla una expresión sin paréntesis para cada una de las tres áreas.

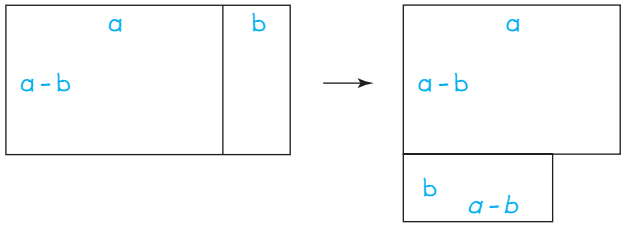


41. **Reto** Katie y Gilberto usaron papel y tijeras para convencerse de que $(a + b)(a - b)$ es realmente igual a $a^2 - b^2$.

a. Gilberto empezó con este rectángulo de papel. Escribió rótulos en el rectángulo para representar las longitudes.

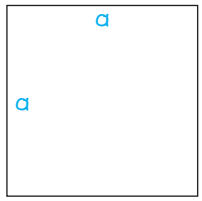


Gilberto luego cortó el rectángulo y lo reordenó.

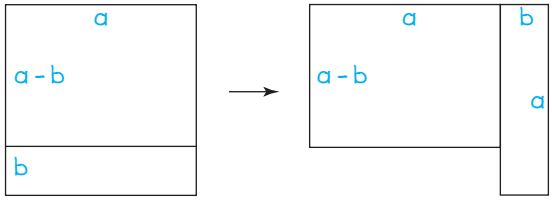


Explica por qué esto muestra que $(a + b)(a - b)$ es igual a $a^2 - b^2$.

b. Katie comenzó con este cuadrado de papel.



Después, cortó el cuadrado y lo reordenó.



Explica por qué esto muestra que $(a + b)(a - b)$ es igual a $a^2 - b^2$.
Ayuda: Las áreas de los dos diagramas anteriores deben ser iguales, de modo que las expresiones que representan esas áreas deben ser iguales.

CONTENTS

42. Reto Prueba que para una ecuación cuadrática, $y = ax^2 + bx + c$, la segunda diferencia en una tabla con entradas consecutivas debe ser constante. Ayuda: Supón que las entradas de la tabla son x, $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$, y así sucesivamente. ¿Cuáles son las salidas correspondientes?

Repaso mixto

Reduce cada fracción.

43. $\frac{21}{99}$ **44.** $\frac{15}{75}$ **45.** $\frac{63}{210}$

Las tablas describen una relación lineal, una relación exponencial y una variación inversa. Escribe una ecuación que describa cada relación.

46.

x	y
-2	500
-1	200
0	80
1	32
2	12.8

47.

x	y
-6	-4
-3	-8
-2	-12
2	12
3	8

48.

x	y
-4	10
-3	3
-1	-11
2	-32
3	-39

49. Dibuja una gráfica de $y = \frac{1}{x}$.

50. Para la escuela, Georgia compró un paquete que contiene 16 piezas idénticas de arcilla. Ella quería compartir la arcilla con algunos amigos durante el recreo.

a. Georgia quiere dividir la arcilla equitativamente entre sus amigos. Si ella invita a tres amigos a compartir la arcilla, ¿cuántos trozos recibirá cada amigo (incluyendo a Georgia)?

b. Si Georgia invita a cinco amigos a compartir la arcilla, ¿cuántos trozos recibirá cada amigo (incluyendo a Georgia)?

c. Escribe una fórmula dando el número de trozos n que recibirá cada amigo (incluyendo a Georgia), si Georgia comparte con f amigos.

d. Usa tu expresión de la Parte c para despejar n cuando f es 3 y cuando f es 5. Si tus respuestas no corresponden con las de las Partes a y b, encuentra los errores que hayas cometido y corrígelos.

6.4 Trabaja con fracciones algebraicas

En lecciones anteriores, descubriste varias herramientas para trabajar más eficazmente con expresiones algebraicas. Ahora, añadirás a tu juego de herramientas al aprender a trabajar con fracciones que presenten expresiones algebraicas. Viste fracciones como éstas en el Capítulo 2, cuando estudiaste la variación inversa.

Piensa & comenta

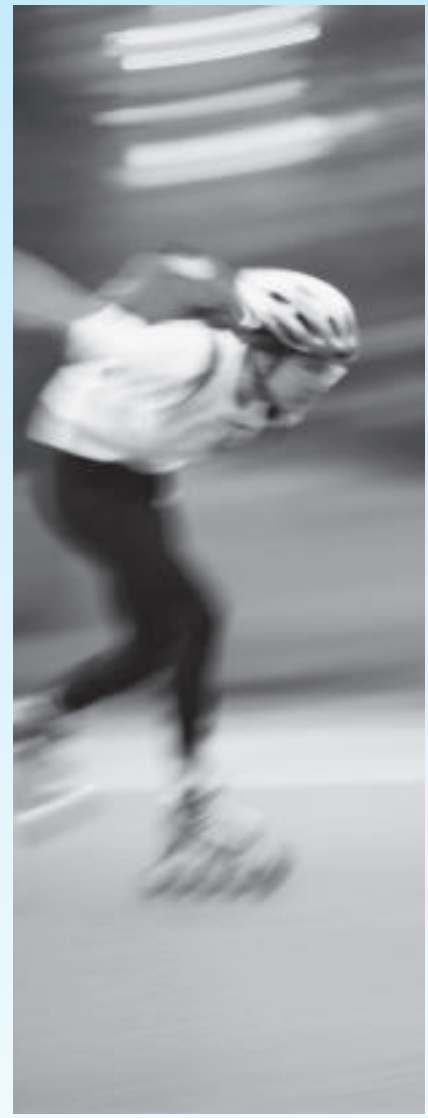
Justo antes de las vacaciones de verano, Adriana le pidió prestados $100 a su tía favorita para comprarse un par de patines en línea. Los disfrutó tanto que pidió prestados otros $100 para comprar un par para su hermana menor. Acordó pagar d dólares por mes y su tía aceptó no cobrar interés.

Escribe una fracción algebraica para expresar cuántos meses le tomará a Adriana pagar los primeros $100.

¿Cuál de estas expresiones muestra cuántos meses le tomará a Adriana pagar toda la deuda?

$\frac{d}{200}$ $\frac{d}{100}$ $\frac{100}{2d}$ $\frac{200}{2d}$

$\frac{100}{d}$ $\frac{200}{d}$ $\frac{100}{d} + \frac{100}{d}$



CONTENTS

Investigación 1 Entiende las fracciones algebraicas

Cuando usas expresiones con fracciones algebraicas, a veces las expresiones parecen no tener sentido para todos los valores de las variables. En esta investigación, explorarás algunas situaciones en las que esto es importante.

MATERIALES
calculadora graficadora

Serie de problemas A

El denominador del lado derecho de esta ecuación tiene cuatro factores.

$$y = \frac{24}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)}$$

1. ¿Cuál es el valor de y si $x = 5$? ¿Y si $x = 6$?

2. ¿Qué sucede con el valor de y si $x = 1$? ¿Y si $x = 2$? ¿Hay otros valores de x para los cuales sucede esto?

3. Selecciona un número menor que 5 para el cual y tenga un valor. ¿Cuál es el valor de y si usas el valor de x que seleccionaste?

4. Observa otra vez la ecuación anterior.

a. Usa tu calculadora para hacer una tabla para la relación comenzando con $x = 0$, en incrementos de 0.25. Copia los resultados en una tabla en tu propio papel. Usa la calculadora para ayudar a rellenar tu tabla para los valores de x hasta $x = 5$.

¿Cómo muestra tu tabla qué valores de x no tienen sentido?

b. Ahora, usa tu calculadora para graficar la relación usando valores de x de $^{-}1$ a 5 y valores de y de $^{-}100$ a 100. Dibuja la gráfica.

¿Qué sucede con la gráfica para los valores de x que no tienen sentido?

Las fracciones algebraicas no tienen sentido *matemático* para los valores de las variables que hacen el denominador igual a 0, en otras palabras, *no están definidas* para esos valores.

MATERIALES

calculadora graficadora

Serie de problemas B

Carlota y Ling asistieron a una subasta para recaudar fondos, esperando conseguir algunos libros de comiquitas de colección. Ambas dijeron que no pagarían más de x dólares por cada libro de comiquitas.

Carlota compró algunos libros de comiquitas que de verdad quería, cada uno por \$5 menos de lo que había fijado como precio máximo. Pagó \$120 por todo. Los libros que quería Ling costaban más y terminó pagando \$5 más de lo que había fijado para cada libro. Gastó \$100 en total.

1. Explica lo que cada expresión significa en términos de la historia de la subasta.

a. x **b.** $x + 5$ **c.** $x - 5$

2. Escribe una expresión que represente el número de libros de comiquitas que compró Ling. Después, escribe una expresión que represente el número que compró Carlota.

3. Esta expresión algebraica representa el número total de libros de comiquitas que compraron las amigas.

$$\frac{100}{x+5} + \frac{120}{x-5}$$

Lee cada comentario acerca de esta expresión y decide si el estudiante tiene razón. Si el estudiante no tiene razón, explica su error.

a. Mikayla: "Aunque no puedes ir a una subasta intentando pagar $^{-}$\$10 por libro de comiquitas, la expresión es *matemáticamente* razonable cuando x tiene un valor de $^{-}10$. La expresión entonces tiene un valor de $^{-}28$".

b. Ben: "La expresión no tiene ningún sentido porque cuando $x = 5$, uno de los denominadores es 0 y no puedes dividir entre 0".

c. Héctor: "La expresión tiene sentido *matemático* para todos los valores, excepto 5 y $^{-}5$".

d. Tamika: "En la situación de una subasta, sólo podemos pensar en pagar algunos números positivos de dólares por un libro de comiquitas. Por lo tanto, para esta historia, la expresión tiene sentido sólo para los valores positivos de x, excepto 5, por supuesto".

e. Tala: "No podemos usar sólo *cualquier* valor positivo de x en la expresión. Por ejemplo, si $x = 7$, Ling habría pagado $x + 5 = \$12$ por libro de comiquitas, lo que significa que habría tenido que comprar ocho y un tercio de libro".

f. Kai: "La expresión tiene sentido *matemático* para cualquiera de los valores de x excepto 5 y $^{-}5$. Sin embargo, en la situación de la subasta, hay sólo un pequeño número de respuestas razonables".

4. Considera el enunciado de Kai. Calcula todos los posibles valores de x, dada la situación de la subasta. Supón que x es un número entero.

5. Ahora usa la calculadora para hacer una tabla y una gráfica para $y = \frac{100}{x+5} + \frac{120}{x-5}$. Usa valores de x de $^-10$ a 10 y valores de y de $^-100$ a 100. Para la tabla, comienza con $x = {}^-10$ y usa un aumento de 1.

¿Cómo muestran la gráfica y la tabla los valores de x para los que la expresión no tiene *sentido matemático*?

Comparte & resume

1. Cuando buscas una expresión para una situación, ¿cuál es la diferencia entre el *sentido matemático* y el *sentido en el contexto de la situación*? Da ejemplos si esto te ayuda a explicar tu punto de vista.

2. Considera la situación de la subasta en la Serie de problemas B.

a. ¿En qué tuviste que pensar cuando tratabas de determinar los valores que tenían sentido *matemático*?

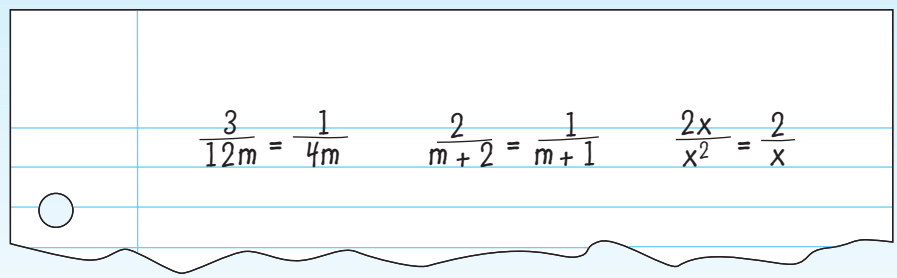
b. ¿En qué tuviste que pensar cuando tratabas de determinar los valores que tenían sentido en el *contexto* de la situación?

Investigación 2 Reordena fracciones algebraicas

Al trabajar con fracciones numéricas, a veces, quieres escribirlas de maneras diferentes. Por ejemplo, para calcular $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, es útil volver a plantear el problema como $\frac{3}{6} + \frac{2}{6}$.

Piensa & comenta

Tamika trató de escribir expresiones equivalentes para tres fracciones algebraicas. ¿Cuáles de éstas son correctas y cuáles incorrectas? ¿Cómo lo sabes?



CONTENTS

Las expresiones que escribió Tamika correctamente son versiones *reducidas* de las fracciones originales. En una fracción reducida, el numerador y el denominador no tienen factores en común.

Hay varias estrategias para reducir fracciones. Por ejemplo, para reducir $\frac{15}{18}$, puedes factorizar el numerador y el denominador:

$$\frac{15}{18} = \frac{3 \cdot 5}{3 \cdot 6} = \frac{3}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{6}$$

Otro método es dividir el numerador y el denominador entre un factor común, en este caso 3:

$$\frac{15}{18} = \frac{\frac{15}{3}}{\frac{18}{3}} = \frac{5}{6}$$

También puedes usar estas estrategias para reducir expresiones algebraicas.

EJEMPLO

- Para reducir $\frac{5}{5x + 15}$, factoriza el numerador y el denominador.

$$\frac{5}{5x + 15} = \frac{5}{5(x + 3)} = \frac{5}{5} \cdot \frac{1}{x + 3} = \frac{1}{x + 3}$$

O, divide el numerador y el denominador entre su factor común.

$$\frac{5}{5x + 15} = \frac{\frac{5}{5}}{\frac{5x + 15}{5}} = \frac{1}{x + 3}$$

- Para reducir $\frac{5a^2}{10a}$, factoriza el numerador y el denominador.

En dos pasos

$$\frac{5a^2}{10a} = \frac{5 \cdot a^2}{5 \cdot 2 \cdot a} = \frac{5}{5} \cdot \frac{a^2}{2 \cdot a} = \frac{a^2}{2a}$$

$$\frac{a^2}{2a} = \frac{a \cdot a}{2 \cdot a} = \frac{a}{a} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$$

En un paso

$$\frac{5a^2}{10a} = \frac{5 \cdot a \cdot a}{5 \cdot 2 \cdot a} = \frac{5}{5} \cdot \frac{a}{a} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$$

O, divide tanto el numerador como el denominador entre sus factores comunes.

En dos pasos

$$\frac{5a^2}{10a} = \frac{\frac{5a^2}{5}}{\frac{10a}{5}} = \frac{a^2}{2a} = \frac{\frac{a^2}{a}}{\frac{2a}{a}} = \frac{a}{2}$$

En un paso

$$\frac{5a^2}{10a} = \frac{\frac{5a^2}{5a}}{\frac{10a}{5a}} = \frac{a}{2}$$

Serie de problemas C

Reduce cada fracción.

1. $\frac{6x^2y}{18x}$ **2.** $\frac{2}{2a+4}$ **3.** $\frac{x}{x^2+2x}$

Escribe dos fracciones que se puedan reducir a la fracción dada.

4. $\frac{1}{3+a}$ **5.** $\frac{x}{2}$ **6.** $\frac{5y}{z}$

Calcula cada producto. Reduce tus respuestas.

7. $\frac{1}{2d} \cdot \frac{4}{3}$ **8.** $\frac{1}{2} \cdot \frac{^-2}{d-5}$

9. $\frac{^-4(d-1)}{3} \cdot \frac{^-1}{2d}$ **10.** $\frac{1}{3(a-4)} \div \frac{3a}{5}$

11. $\frac{\frac{a}{7}}{\frac{3a}{5}}$ **12.** $\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a+1}}$

Recuerda

Dividir $\frac{a}{b}$ entre $\frac{c}{d}$ es lo mismo que multiplicar $\frac{a}{b}$ por el recíproco de $\frac{c}{d}$:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Usarás lo que has aprendido para analizar varios trucos con números.

Serie de problemas D

Brian inventó cuatro trucos con números. Para cada uno, haz lo siguiente:

- Verifica si el truco funciona *siempre* o si no es así. Si funciona siempre, explica por qué.
- Si no funciona siempre, ¿funciona sólo con pocas excepciones? Si así es, ¿cuáles son las excepciones? Explica por qué funciona para todos los números, que no sean esas excepciones.
- Si no funciona nunca o funciona sólo para unos cuántos números, explica cómo lo sabes.

1. *Truco con números 1:* Escoge un número, cualquier número. Multiplícalo por 2 y eleva al cuadrado el resultado. Suma 12. Después divide entre 4 y resta el cuadrado del número que escogiste al principio. Tu resultado es 3.

2. *Truco con números 2:* Escoge un número, cualquier número. Súmale 2 y eleva el resultado al cuadrado. Multiplica el nuevo número por 6 y después resta 24. Divide entre el número que escogiste. Divide otra vez entre 6 y después resta 4. Tu resultado es el número que escogiste.

3. *Truco con números 3:* Escoge un número, cualquier número. Multiplica tu número por 3 y después réstale 4. Divide entre 2 y suma 5. El resultado es 6.

4. **Reto** *Truco con números 4:* Escoge un número, cualquier número. Súmale 6 y multiplica el resultado por el número que escogiste. Después suma 9. Ahora divide entre 3 más que el número seleccionado y, después, resta el número que escogiste. Tu resultado es 3.

Comparte & resume

Evan redujo cada fracción como se muestra. Verifica sus respuestas. Indica si hizo el problema correctamente. Si no, explica en qué está equivocado y cómo hallar el resultado correcto.

1. $\frac{3}{x+3} = \frac{1}{x+1}$

2. $\frac{a}{a+4} = \frac{1}{4}$

3. $\frac{5a}{3} \div \frac{3}{a} = \frac{5a}{3} \cdot \frac{a}{3} = \frac{5a^2}{9}$

4. $\frac{12t^2}{35} \cdot \frac{21}{16t} = \frac{9t}{20}$

Ejercicios por tu cuenta

Practica & aplica

1. Considera esta ecuación.

$$y = \frac{2 - x}{(x - 2)(x + 1)}$$

a. ¿Para qué valores de x está indefinida y?

b. Explica cómo podrías usar la información de la Parte a como ayuda para hacer una gráfica de la ecuación.

2. Cada mañana, la gerente de un restaurante compra $300 de pescado fresco en el mercado. Una mañana ,compró pescado que estaban vendiendo a d dólares la libra. La siguiente mañana el precio había aumentado $2 por libra.

a. Escribe una expresión para la cantidad de pescados, en libras, que la gerente compró la primera mañana.

b. Escribe una expresión para la cantidad de pescados, en libras, que la gerente compró la segunda mañana.

c. Escribe una ecuación para la cantidad total de pescados que la gerente compró esos dos días.

d. ¿Para qué valores de d, si los hay, no tiene sentido *matemático* tu expresión de la Parte c?

e. ¿Para qué valores adicionales de d, si los hay, no tiene sentido tu expresión en esta situación?

Recuerda

tasa · tiempo = distancia

o

$$\text{tiempo} = \frac{\text{distancia}}{\text{tasa}}$$

3. Cada viernes, un repartidor conduce su camión 120 millas en la ciudad para repartir y después regresar. Un viernes en particular, condujo en la ciudad al límite de velocidad anunciado, s. Sin embargo, en el viaje de regreso, manejó más lentamente debido a una construcción en la carretera y tuvo que viajar a 15 millas por hora menos del límite de velocidad.

a. Escribe una expresión para el tiempo que le tomó conducir en la ciudad.

b. Escribe una expresión para el tiempo que le tomó el viaje de regreso.

c. Escribe una ecuación para el tiempo total que le llevó conducir de ida y vuelta.

d. ¿Para qué valores de s, si los hay, no tiene sentido *matemático* tu expresión de la Parte c?

e. ¿Para qué valores adicionales de s, si los hay, no tiene sentido tu expresión en esta situación?

Reduce cada fracción.

4. $\frac{12m}{2m}$

5. $\frac{2x}{4xy}$

6. $\frac{20a^2b}{16ab^2}$

7. $\frac{3k}{k^2 - 6k}$

Reduce cada fracción.

8. $\frac{1 + a}{a(1 + a)}$ **9.** $\frac{3(x + 1)}{6}$

10. $\frac{nm}{m^2 + 2m}$ **11.** $\frac{3ab}{a^2b^2 - 3ab}$

Calcula cada producto o cociente. Reduce tus respuestas.

12. $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{a}$ **13.** $\frac{4}{3} \cdot \frac{d}{2}$ **14.** $\frac{1}{5a} \cdot \frac{3a^2}{2}$

15. $\frac{1}{a} \div \frac{1}{a}$ **16.** $\frac{m}{4} \div \frac{4}{m}$ **17.** $\frac{^-1(x - 2)}{3(2 - x)}$

Para los trucos con números de los Ejercicios 18 y 19, haz lo siguiente:

- Verifica si el truco funciona *siempre.* Si es así, explica por qué.
- Si no funciona siempre, ¿funciona sólo con pocas excepciones? Si es así, ¿cuáles son las excepciones? Explica por qué funciona para todos los números, que no sean esas excepciones.
- Si no funciona nunca o funciona sólo para unos cuántos números, explica cómo lo sabes.

18. Escoge un número. Réstale 1 y eleva al cuadrado el resultado. Réstale 1 otra vez. Divide entre tu número. Suma 2. El resultado es tu número original.

19. Escoge un número. Súmale 3 y eleva al cuadrado el resultado. Réstale 4. Divide entre el número que es 1 más que el número que escogiste. Réstale 5 al resultado. El resultado es el número que escogiste.

Conecta & amplía

20. Considera esta ecuación.

$$y = \frac{2k^2 - 3k}{k^2 - k}$$

a. ¿Para qué valores de k, si los hay, no tiene valor y?

b. Explica qué le sucederá a la gráfica de la ecuación en los valores que calculaste en la Parte a.

21. **Ciencia física** Todos los cuerpos se atraen entre sí con la fuerza llamada *gravedad.* El matemático inglés Isaac Newton descubrió esta fórmula al calcular la fuerza gravitatoria entre dos cuerpos:

$$F = G\left(\frac{Mm}{r^2}\right)$$

En la fórmula, F es la fuerza gravitatoria entre dos cuerpos, M y m son las masas de los cuerpos, r es la distancia entre ellos y G es un número fijo llamado *constante gravitatoria.*

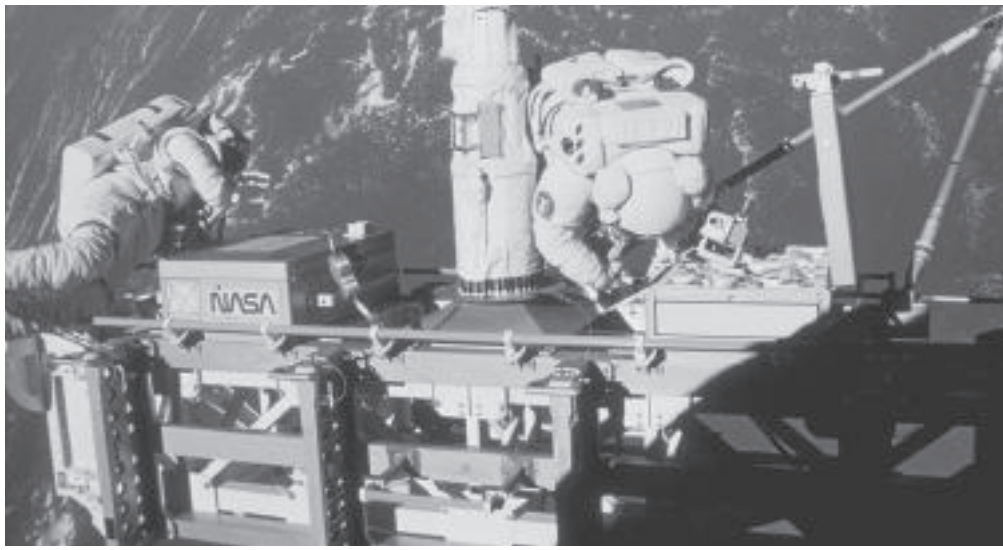
En tus propias palabras

Describe una situación que se pueda representar con fracciones algebraicas. (Analiza los problemas de esta lección si necesitas ideas.) Comenta los valores para los cuáles tu expresión no tiene sentido matemático y los valores para los que tu expresión no tiene sentido en el contexto de la situación.

a. ¿Cómo cambia la fuerza gravitatoria entre dos cuerpos si se duplica la masa de uno de los cuerpos? ¿Si la masa de uno de los cuerpos se triplica?

b. ¿Cómo cambia la fuerza gravitatoria entre dos cuerpos si se duplica la distancia entre los cuerpos? ¿Si se triplica la distancia?

c. Supón que se duplican las masas de dos cuerpos y también la distancia entre los cuerpos. ¿Cómo afecta esto la fuerza gravitatoria entre los cuerpos?



Reduce cada expresión.

22. $\dfrac{4k - 2}{2k^2 + 4k - 2}$

23. $\dfrac{(u - 3)(u + 2)(u - 1)}{^{-}1(3 - u)(1 - u)}$

24. Considera esta ecuación.

$$y = \frac{24}{2 - 5x}$$

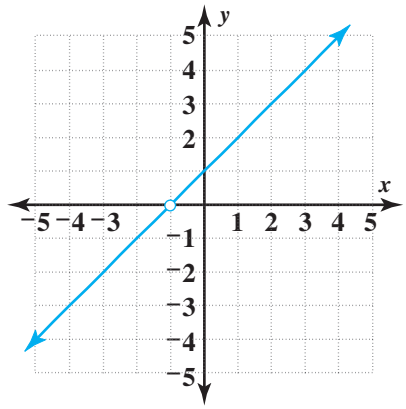
a. ¿Para qué valores de x, no tiene valor y? Explica.

b. ¿Para qué valores de x, será positiva y? Explica.

c. ¿Para qué valores de x, será negativa y? Explica.

d. ¿Para qué valores de x, será y igual a 0? Explica.

25. La ecuación $y = \frac{(x+1)^2}{x+1}$ se puede reducir a $y = x + 1$ para todos los valores de x excepto -1 (lo que hace el denominador 0). La gráfica de $y = \frac{(x+1)^2}{x+1}$ se parece a la gráfica de $y = x + 1$, pero con un círculo abierto en el punto donde $x = -1$.



Usa esta idea para graficar cada ecuación.

a. $y = \frac{4x^3}{2x}$ **b.** $y = \frac{4x^2 + 2x}{2x}$

26. ¿Para qué valores de m es verdadero que $\frac{1}{m} > \frac{1}{m+1}$? Explica.

Repaso mixto

Evalúa cada expresión.

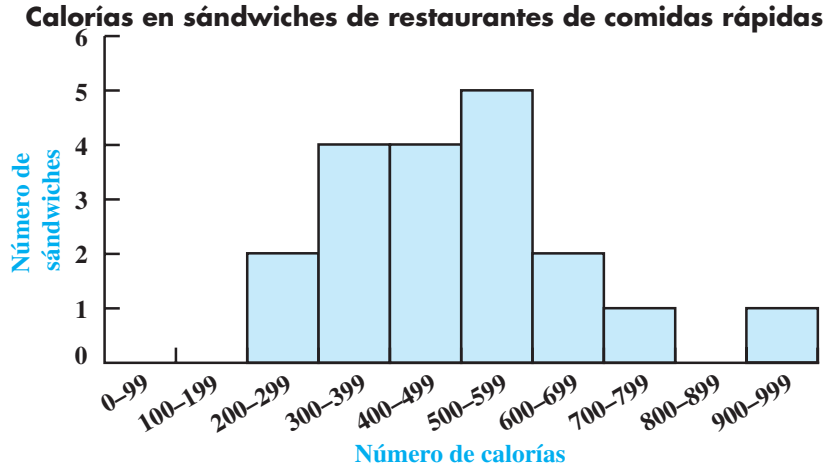
27. $\frac{2}{3} + \frac{5}{8}$ **28.** $\frac{3}{10} - \frac{1}{4}$ **29.** $\frac{3}{7} - \frac{8}{3}$

30. $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8}$ **31.** $\frac{3}{10} \div \frac{1}{4}$ **32.** $\frac{3}{7}\left(\frac{8}{3}\right)$

Vuelve a plantear cada expresión usando una sola base y un solo exponente.

33. $27x^3$ **34.** $a^{12} \cdot (a^2)^{-7}$ **35.** $\frac{32}{c^5}$

36. Estadística Gerry encuestó 5 restaurantes de comida rápida acerca del número de calorías en los varios tipos de sándwiches que venden. Trazó sus resultados en un histograma. Por ejemplo, la primera barra en su gráfica revela que dos de los sándwiches tenían de 200 a 299 calorías.



a. ¿Para cuántos sándwiches diferentes recopiló datos Gerry?

b. Estima la mediana de estos datos. Explica tu respuesta.

c. ¿Qué te indica el histograma acerca de los sándwiches de estos restaurantes?

CONTENTS

6.5 Suma y resta fracciones algebraicas

Has sumado y restado fracciones en las cuales tanto el numerador como el denominador son números. En esta lección, aplicarás lo que sabes para sumar fracciones con variables.

Piensa & comenta

Considera estas fracciones y números mixtos.

$$1\frac{1}{2} \qquad \frac{2}{3} \qquad \frac{3}{8} \qquad \frac{3}{10} \qquad 2\frac{5}{12}$$

- Escoge dos de los números y súmalos. Describe cómo calculaste el denominador común y la suma.
- Escoge dos de las fracciones que quedan y resta la menor de la mayor. Describe cómo calculaste el denominador común y la diferencia.
- Finalmente, resta la fracción que queda de 10. Describe cómo calculaste el denominador común y la diferencia.

Investigación 1 Combina fracciones algebraicas

Ahora, usarás lo que sabes sobre fracciones con números para sumar y restar fracciones algebraicas con variables.

Serie de problemas A

1. Copia y completa esta tabla de adición.

+			$\frac{3}{4}$
$\frac{1}{2}$		2	
			1
$\frac{3}{5}$	$\frac{11}{5}$		

CONTENTS

Calcula cada suma o diferencia.

2. $\frac{100}{w} + \frac{100}{w}$

3. $\frac{100}{w} - \frac{100}{w}$

4. $\frac{100}{w} + \frac{100}{w} + \frac{100}{w}$

5. $\frac{1}{2x} + \frac{2}{3x}$

6. $\frac{m}{3} + \frac{m}{6}$

7. $\frac{y}{p} + \frac{1}{2p}$

8. $\frac{5}{8} - \frac{5}{6}$

9. $\frac{3}{2x} - \frac{3}{2y}$

10. Dave puede escribir a máquina un promedio de n palabras por minuto. Escribe una expresión para el número de minutos que le toma a Dave escribir a máquina

a. 400 palabras.

b. 200 palabras.

c. 1,000 palabras.

d. Suma tus expresiones de las Partes a, b y c. ¿Qué representa la suma en términos de la situación de escribir a máquina?

Cuando sumas o restas fracciones algebraicas, hay muchas manera de calcular un denominador común.

EJEMPLO

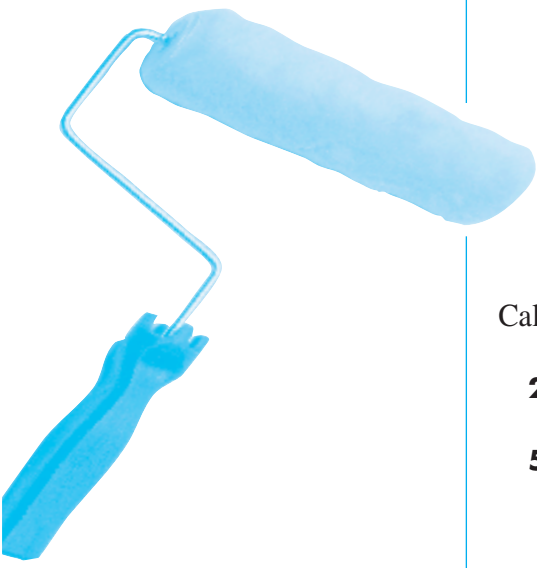
Evan, Tala y Lucita tienen diferentes métodos para sumar $\frac{14}{8x}$ y $\frac{3}{4x}$.

Usé 8x • 4x como el denominador común.
Yo reduje 14/8x a 7/4x. Así las dos fracciones tienen el mismo denominador y puedo sumarlas.
Yo usé el mínimo común múltiplo de 4x y 8x, el cual es 8x, como el denominador común.
14/8x + 3/4x = 14/8x · 4x/4x + 3/4x · 8x/8x
= 56x/32x² + 24x/32x²
= 80x/32x²
= 5/2x
14/8x + 3/4x = 7/4x + 3/4x
= 10/4x
= 5/2x
14/8x + 3/4x = 14/8x + 3/4x · 2/2
= 14/8x + 6/8x
= 20/8x
= 5/2x

Ten en mente los tres métodos anteriores a medida que trabajas en la siguiente serie de problemas.

CONTENTS

Serie de problemas B



1. Copia y completa la siguiente tabla de adición.

+			$\frac{8}{15x}$
$\frac{1}{3x}$		$\frac{2}{x}$	
	$\frac{5}{4x}$		
	$\frac{3}{5x}$	$\frac{53}{30x}$	

Calcula cada suma o diferencia.

2. $\frac{6}{3x^2} - \frac{2}{2x^2}$ **3.** $\frac{2}{4t} - \frac{2t}{3}$ **4.** $\frac{3}{6m} + \frac{4m}{8m^2}$

5. Camila y Lakita ganan dinero los fines de semana pintando casas. Le toma a Camila $2n$ minutos para pintar 1 metro cuadrado ella sola; y a Lakita le toma $3n$ minutos.

a. Escribe una expresión para la cantidad de área que Camila pinta en 1 minuto. Haz lo mismo para Lakita.

b. ¿Cuánta área pintarán las amigas en 1 minuto si trabajan juntas? Escribe tu expresión como una sola fracción algebraica.

c. Si las amigas trabajan juntas para pintar una habitación con 40 m^2 de pared, ¿cuánto tiempo les llevará el trabajo? Muestra cómo hallaste la respuesta.

Comparte & resume

Considera estos cinco términos.

$$c \qquad 2 \qquad 3 \qquad 2c^2 \qquad 3c^2$$

1. Crea cuatro problemas de adición y sustracción con fracciones cuyo numerador y denominador estén formados por estos términos (por ejemplo, $\frac{c}{2} + \frac{3}{3c^2}$). Usa cada término sólo una vez en un problema. Después, intercambia problemas con tu compañero(s) y resuelve sus problemas.

2. Usa los términos para crear un problema de adición o sustracción con una suma o diferencia de 3.

Investigación 2 Estrategias para sumar y restar fracciones algebraicas

Ahora aprenderás más acerca de sumar y restar fracciones algebraicas.

Serie de problemas C

1. Calcula cada suma sin usar la calculadora.

a. $\frac{1}{1} + \frac{1}{2}$ **b.** $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ **c.** $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ **d.** $\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$

2. Busca un patrón en las sumas del Problema 1. Úsalo para calcular $\frac{1}{5} + \frac{1}{6}$ sin realmente calcular la suma.

3. En cada parte del Problema 1, ¿cómo se relaciona el denominador de la adición con los denominadores de las dos fracciones que se suman?

4. En cada parte del Problema 1, ¿cómo se relaciona el numerador de la adición con los denominadores de las dos fracciones que se suman?

5. Usa los patrones que observaste para hacer una conjetura acerca de esta suma.

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1}$$

6. Considera otra vez la suma $\frac{1}{5} + \frac{1}{6}$.

a. Si esta suma es igual a $\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1}$, ¿cuál es el valor de m?

b. Usa tu conjetura del Problema 5 y el valor de m de la Parte a para sumar $\frac{1}{5} + \frac{1}{6}$. ¿Corresponde el resultado con tu predicción en el problema 2?

c. Para verificar tu resultado, calcula la suma hallando un denominador común y sumando.

7. **¡Pruébalo!** Trata de probar que tu conjetura es verdadera.

Datos de interés

Los antiguos egipcios preferían fracciones con 1 en el numerador, llamadas fracciones unitarias. Expresaban otras fracciones, usando jeroglíficos, como las sumas de fracciones unitarias. Por ejemplo, $\frac{21}{30}$ se podría expresar como $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$.

CONTENTS

EJEMPLO

Ésta es la manera en que Lydia consideró la suma de $\frac{1}{m}$ y $\frac{1}{m+1}$.

"Cuando sumo $\frac{1}{m}$ y $\frac{1}{m+1}$, uso un denominador común de $m(m+1)$, el producto de dos denominadores."

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} = \frac{1}{m} \cdot \frac{m+1}{m+1} + \frac{1}{m+1} \cdot \frac{m}{m}$$

$$= \frac{m+1}{m(m+1)} + \frac{m}{m(m+1)}$$

$$= \frac{m+1+m}{m(m+1)}$$

$$= \frac{2m+1}{m(m+1)}$$

Serie de problemas D

Comenta la estrategia de Lydia con tu compañero(a). Asegúrate de entender cómo viene cada renglón del anterior.

1. ¿Por qué Lydia multiplicó la primera fracción por $\frac{m+1}{m+1}$?

2. ¿Por qué multiplicó la segunda fracción por $\frac{m}{m}$?

3. Ben dijo, —Tengo un método más fácil para sumar $\frac{1}{m}$ y $\frac{1}{m+1}$. Esto es lo que hice.

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} = \frac{1+1}{m+1} + \frac{1}{m+1}$$

$$= \frac{2}{m+1} + \frac{1}{m+1}$$

$$= \frac{3}{m+1}$$

¿Es correcto el método de Ben? Explica.

Cuando se suman o restan fracciones algebraicas, con frecuencia, lo más fácil es dejar el numerador y el denominador en forma factorizada. Conocer los factores te permite reconocer e identificar los factores comunes más fácilmente.

EJEMPLO

Suma:

$$\frac{2x}{x(x-1)} + \frac{5}{(x-1)(x+2)}$$

Los denominadores factorizados facilitan la reducción de la primera fracción y también facilitan hallar un denominador común.

Puedes reducir la primera fracción dividiendo el numerador y el denominador entre x. Luego, puedes usar $(x-1)(x+2)$ como denominador común de las fracciones resultantes.

$$\begin{aligned}\frac{2x}{x(x-1)} + \frac{5}{(x-1)(x+2)} &= \frac{2}{x-1} + \frac{5}{(x-1)(x+2)} \\ &= \frac{2}{x-1} \cdot \frac{x+2}{x+2} + \frac{5}{(x-1)(x+2)} \\ &= \frac{2(x+2)+5}{(x-1)(x+2)} \\ &= \frac{2x+9}{(x-1)(x+2)}\end{aligned}$$

Serie de problemas E

Calcula cada suma o diferencia. Reduce tus respuestas si es posible.

1. $\frac{1}{m} + \frac{2}{m+1}$

2. $\frac{4}{m} - \frac{1}{m-1}$

3. $\frac{4}{b+2} + \frac{b}{b+3}$

4. $\frac{2(x+1)}{x(x+1)} - \frac{1}{x-3}$

5. $\frac{10}{x+4} + \frac{3x}{9x^2}$

6. $\frac{2x}{x-1} - \frac{x+1}{x+3}$

7. Considera estos problemas de sustracción.

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \qquad \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \qquad \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$$

a. Calcula cada diferencia.

b. Usa el patrón en tus respuestas de la Parte a para resolver este problema de sustracción sin realmente calcular la diferencia.

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{6}$$

c. Usa el patrón para calcular esta diferencia.

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}$$

d. **¡Pruébalo!** Usa el álgebra para mostrar que tu respuesta en la Parte c es correcta.

Comparte & resume

En el Ejemplo de la página 415, Lydia explica cómo piensa respecto a la suma de fracciones algebraicas. Calcula la siguiente diferencia y explica cómo consideras *su* solución.

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x}$$

Investigación 3 Resuelve ecuaciones con fracciones

Ya has resuelto ecuaciones con fracciones algebraicas. Por ejemplo, en años anteriores, has resuelto proporciones como éstas:

$$\frac{x}{2} = \frac{9}{6} \qquad \frac{50}{3.6} = \frac{11}{m}$$

Piensa & comenta

Describe algunas maneras en que podrías resolver cada una de estas ecuaciones.

$$\frac{x}{2} = \frac{9}{6} \qquad \frac{50}{3.6} = \frac{11}{m}$$

MATERIALES

calculadora graficadora

Serie de problemas F

Resuelve cada ecuación usando el método que prefieras. Usa diferentes métodos para diferentes ecuaciones.

1. $\frac{3x - 6}{4} = x - 8$

2. $\frac{t}{2} + \frac{t}{3} = {}^{-}1$

3. $\frac{4a}{5} - \frac{2 - a}{4} = 30$

4. $\frac{p}{5} - p = {}^{-}0.4$

5. ¿Qué fracción sumada a $\frac{2x - 1}{4}$ es igual a $\frac{x^2 - 4}{4}$?

6. ¿Qué fracción restada de $\frac{k + 3}{5}$ es igual a $\frac{k - 3}{15}$?

7. Evan estimó la solución de la ecuación $\frac{n + 7}{2} + \frac{n}{3} = 10$ hallando la intersección de las gráficas de estas dos ecuaciones.

$$y = \frac{n + 7}{2} + \frac{n}{3} \qquad y = 10$$

a. Explica por qué funciona el método de Evan.

b. Grafica ambas ecuaciones en la misma ventana de tu calculadora y usa las gráficas para estimar la solución.

c. Verifica tu estimación resolviendo la ecuación original. Usa el método que prefieras.

Todas las ecuaciones en la Serie de problemas F contienen una o más fracciones con variables en el numerador. Al resolver ecuaciones con variables en los denominadores, necesitas verificar que las "soluciones" no hagan que los denominadores en la ecuación original sean igual a 0.

EJEMPLO

Resuelve la ecuación $\frac{5x + 10}{x + 2} = \frac{3}{x + 1}$.

Una manera de resolver esta ecuación es "limpiar" las fracciones multiplicando ambos lados por un denominador común:

$$\frac{(x + 2)(x + 1)}{1} \cdot \frac{5x + 10}{x + 2} = \frac{3}{x + 1} \cdot \frac{(x + 2)(x + 1)}{1}$$

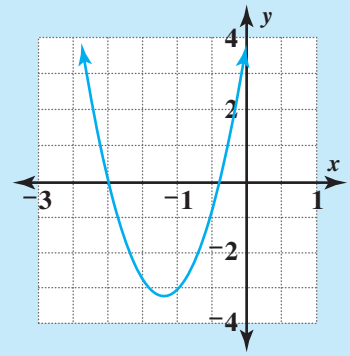
y después reduciendo la ecuación resultante:

$$\frac{x + 2}{x + 2} \cdot (x + 1)(5x + 10) = 3(x + 2) \cdot \frac{x + 1}{x + 1}$$
$$1 \cdot (x + 1)(5x + 10) = 3(x + 2) \cdot 1$$
$$5x^2 + 15x + 10 = 3x + 6$$

El hacer un lado de la ecuación igual a 0 te permitirá resolverla gráficamente.

$$5x^2 + 12x + 4 = 0$$

En este caso, la ecuación reducida es cuadrática. Puedes estimar la solución si graficas $y = 5x^2 + 12x + 4$ y hallas los puntos donde $y = 0$.



Las soluciones son aproximadamente $^-2$ y $^-0.4$. Verifica estos valores *en la ecuación original.* Como $^-2$ hace el denominador $\frac{5x + 10}{x + 2}$ igual a 0, ésta *no* es una solución de la ecuación original. El número $^-0.4$ hace la ecuación original verdadera, de modo que, $^-0.4$ es una solución; $^-2$ no lo es.

A medida que resuelves las siguientes ecuaciones, asegúrate de verificar que tus soluciones no hagan ninguno de los denominadores en la ecuación original igual a 0.

MATERIALES

calculadora graficadora (opcional)

Serie de problemas G

Resuelve cada ecuación usando cualquier método. Usa diferentes métodos para diferentes ecuaciones. Para estimar las soluciones, es posible que necesites una gráfica para algunos de ellos.

1. $\frac{10}{7} = \frac{k+1}{k-3}$

2. $\frac{6-2x}{x-3} = 8$

3. $\frac{2}{g+1} - \frac{2}{g-1} = 4$

4. $\frac{20-a}{a^2-4} = \frac{5}{a-2} + \frac{3}{a+2}$

5. $0 = \frac{2}{s+3} + \frac{s}{s+2}$

6. $\frac{-60-12z}{z+5} = -120$

Comparte & resume

Selecciona un problema de la Serie de problemas G y explica cómo lo resolviste, de manera que un estudiante que haya estado ausente lo pueda entender.

Ejercicios por tu cuenta

Practica & aplica

Calcula cada suma o diferencia.

1. $\frac{9}{8} - \frac{8}{9}$

2. $\frac{x}{4} + \frac{y}{2}$

3. $\frac{2xy}{3} - \frac{1}{6}$

4. $\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}$

5. $\frac{c}{a} - \frac{a}{c}$

6. Después de las clases, Marcus y su hermana Annette tienen trabajos de medio tiempo en un supermercado. Annette puede apilar hasta 500 latas en z minutos en el exhibidor al final del pasillo. Marcus trabaja la mitad de rápido que Annette y apila 500 latas en $2z$ minutos.

a. Escribe una expresión para averiguar cuántas latas puede apilar Marcus en 1 minuto.

b. Escribe una expresión para averiguar cuántas latas puede apilar Annette en 1 minuto.

c. Trabajando juntos, ¿cuántas latas pueden apilar Marcus y Annette en 1 minuto? Expresa tu respuesta como una sola fracción algebraica.

d. El gerente de la tienda les ha pedido a los dos que hagan un exhibidor usando 750 latas. ¿Cuánto tiempo les llevará?

7. Esperanza y Jasmine manejan las mismas 300 millas de camino en carros separados. Esperanza conduce un promedio de n millas por hora. Jasmine conduce 1.5 veces más rápido.

a. Escribe una expresión para el tiempo que le toma a Jasmine conducir las 300 millas.

b. Presume que Jasmine y Esperanza salieron al mismo tiempo. Escribe una expresión para la diferencia en tiempo entre la llegada de Jasmine al destino final y la llegada de Esperanza.

c. Escribe una expresión para el tiempo total que ambas mujeres pasaron viajando.

8. Copia y completa esta tabla de adición.

+	$\frac{5}{2x}$	$\frac{4}{x}$	$2x$
$\frac{1}{4x}$			
$-\frac{2}{3x}$			
$\frac{3+x}{2}$			

Calcula cada suma o diferencia.

9. $\frac{1}{m} - \frac{2}{m+1}$

10. $\frac{4}{m} + \frac{1}{m+1}$

11. $\frac{3}{d} + \frac{4}{d+1}$

12. $\frac{3}{c} - \frac{4}{c-1}$

13. $\frac{a}{a+4} + \frac{3a}{5}$

14. $\frac{x^2}{x^2-1} - \frac{1}{x^2-1}$

15. $\frac{5}{k} - \frac{5}{k+1}$

16. $\frac{2y-1}{4} - \frac{y}{2}$

Resuelve cada ecuación usando cualquier método.

17. $\frac{2x}{3} + \frac{1}{4} = x - 1$

18. $\frac{v-2}{3} + \frac{v}{2} = 10$

19. $\frac{n+1}{n-1} = 3$

20. $\frac{2-u}{u+1} = 5$

21. $\frac{8}{w+5} - \frac{2}{w+5} = \frac{2}{w} + \frac{1}{w+5}$

22. $\frac{3}{c-1} + \frac{3}{c+1} = \frac{21-c}{c^2-1}$

23. ¿Qué fracción sumada a $\frac{r+1}{r}$ es igual a 1?

24. ¿Qué fracción restada de $\frac{2-x}{7}$ es igual a $\frac{x}{14}$?

25. ¿Qué fracción restada de $\frac{1}{v}$ es igual a $\frac{3v}{2}$?

Conecta & amplía

26. Economía Meg gana \$70 por w horas recogiendo fruta, su amiga Rashid, quien tiene más experiencia y trabaja más rápido, gana \$80 por w horas. Juntas ganan \$1,000 por semana.

Escribe una breve explicación para cada expresión.

a. $\frac{70}{w}$ **b.** $\frac{80}{w}$ **c.** $\frac{70}{w} + \frac{80}{w}$

d. $\frac{150}{w}$ **e.** $1{,}000 \div \frac{150}{w}$ **f.** $1{,}000 \div \frac{70}{w}$

g. $1{,}000 \div \frac{80}{w}$

Suma o resta.

27. $\frac{c}{ab} - \frac{a}{bc}$

28. $\frac{2x}{2y} + \frac{y}{x}$

29. $\frac{G+1}{G-1} - \frac{2}{G+1}$

30. $\frac{4-2y}{6} + \frac{y}{4}$

31. $\frac{1}{x^2y} + \frac{1}{xy}$

32. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{y}$

33. $\frac{1}{xc} + 1 - \frac{1}{c}$

34. $\frac{a+1}{1} + \frac{1}{a-1}$

35. $2 - \frac{2}{s+1} - \frac{s}{s+1}$

36. $\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2}$

37. $\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2}$

38. La Srta. Díaz condujo 135 millas para visitar a su madre. Ella sabía que habían aumentado el límite de velocidad 10 mph, después de las primeras 75 millas, pero no podía recordar cuáles eran los límites de velocidad.

a. Escribe una expresión que represente la cantidad de tiempo que le tomará a la Srta. Díaz conducir las primeras 75 millas si viaja al límite de velocidad de x mph.

b. Escribe una expresión que represente la cantidad de tiempo que le tomará viajar las 60 millas restantes al nuevo límite de velocidad.

c. Escribe una expresión para el tiempo total que la Srta. Díaz pasa conduciendo. Combina las partes de tu expresión en una sola fracción algebraica.

En tus propias palabras

Escribe un problema de adición que tenga dos fracciones algebraicas con expresiones algebraicas diferentes en sus denominadores. Explica paso por paso cómo sumar las dos fracciones.

Resuelve cada ecuación usando cualquier método.

39. $\frac{p+2}{2} + \frac{p-1}{5} = p + 1$

40. $\frac{r-8}{3} + \frac{r-5}{2} = r - 5$

41. $\frac{T-1}{4} + \frac{2-T}{3} + \frac{T+1}{2} = 3$

42. $\frac{v-2}{4} + \frac{2}{v-1} + \frac{1}{2} = \frac{v^2-9}{4v-4}$

43. $\frac{Z-5}{2} - \frac{3}{Z+5} = \frac{(Z+1)(Z-3)}{2Z+10}$

44. $\frac{3}{x-3} + \frac{4}{x+3} = \frac{21-x}{x^2-9}$

45. Jing gana x dólares por embolsar abarrotes en el mercado local. También trabaja como tutora de matemáticas. Su tasa por hora de tutoría es de $2 más que el doble de su tasa por hora en el mercado.

La semana pasada Jing ganó $51.75 en el mercado y $40.50 en la tutoría. Se dio cuenta de que si hubiera pasado todas las horas trabajando en la tutoría habría ganado, ¡$162! Escribe y resuelve una ecuación para calcular la tasa por hora de Jing en cada trabajo.

46. Para dos números A y B,

$$\frac{5x+1}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$$

a. ¿Cuál es el denominador común para $\frac{A}{x+1}$ y $\frac{B}{x-1}$?

b. Suma $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$ usando el denominador común que calculaste en la Parte a. Escribe la suma sin paréntesis.

c. Explica por qué puedes usar este sistema para calcular los valores de A y B:

$$A + B = 5$$
$$^{-}A + B = 1$$

d. Resuelve el sistema y calcula A y B.

Repaso mixto

Evalúa sin usar calculadora.

47. $\sqrt{(^{-}18)^2}$

48. $^{-}\sqrt{7^2}$

49. $^{-}(\sqrt{64})^2$

50. $(^{-}\sqrt{49})^2$

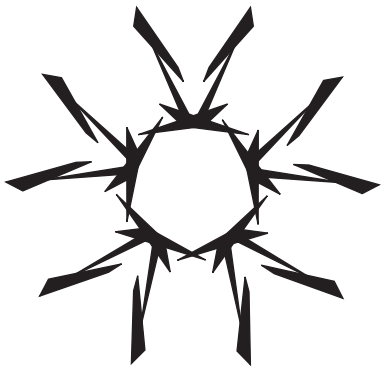
CONTENTS

51. ¿Cuáles de las siguientes son iguales? Halla todos los pares que correspondan.

a. 12 **b.** 12^{-1} **c.** $4\sqrt{\frac{1}{9}}$

d. $4\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$ **e.** $\sqrt{\frac{4}{9}}$ **f.** el recíproco de 12

52. **Geometría** Esta figura tiene tanto simetría de reflexión como simetría de rotación.



a. ¿Cuántos ejes de simetría tiene?

b. ¿Cuál es el ángulo de rotación?

53. Una figura tiene un área de a cm^2. ¿Qué área tendría una ampliación de la figura usando un factor de escala de f?

Reescribe cada ecuación en la forma $y = mx + b$.

54. $2(y + x) + 1 = 3x - 2y + 3$

55. $6y + \frac{3}{7}x - 2 = 0$

56. $8 = {}^{-}(3x + 4) + (4 - y) - (2y + 10)$

57. En 1999, en Estados Unidos empezaron a acuñar series de monedas de 25 centavos cuyos reversos están diseñados por diferentes estados. Chris empezó a coleccionar monedas, apartándolas del resto de sus monedas de vuelto.

Para la época en que acuñaron las monedas para el cuarto estado, Chris ya tenía varias de Delaware, New Jersey y Pennsylvania. Al contarlas descubrió que tenía 3 veces tantas monedas de Delaware como de Pennsylvania. El número de monedas de New Jersey que tenía era 7 veces más que la mitad del número de las monedas de Delaware.

a. Selecciona una variable y úsala para expresar el número de monedas de 25 centavos de cada tipo que tenía Chris.

b. En conjunto, Chris había ahorrado $12.75 en monedas de 25 centavos. Escribe y resuelve una ecuación para calcular cuántas monedas tenía de cada tipo.

Datos de interés

El U.S. Mint decidió acuñar 5 monedas de 25 centavos de los estados, en el orden en que éstos ratificaron la constitución y fueron admitidos a la Unión. La moneda de 25 centavos para Nueva York, el undécimo estado admitido a la Unión, fue la primera que se acuñó en el año 2001.

CONTENTS

Capítulo 6 Repaso & autoevaluación

Resumen del capítulo

VOCABULARIO
binomio
desarrollar
términos semejantes

En este capítulo, aprendiste a desarrollar y reducir expresiones algebraicas. Dos temas principales fueron el uso de la propiedad distributiva y el trabajo con fracciones algebraicas.

Resolviste problemas de multiplicación de binomios que requerían el uso de la propiedad distributiva para desarrollar el producto y después reducir combinando términos semejantes. Al enfocar tu atención en las fracciones algebraicas, descubriste que las podías reducir, sumar y restar usando los mismos métodos que usaste para las fracciones numéricas.

Terminaste el capítulo resolviendo ecuaciones que requirieron que aplicaras todas tus nuevas destrezas.

Estrategias y aplicaciones

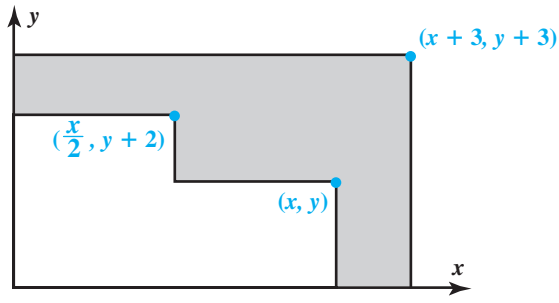
Las preguntas en esta sección te ayudarán a repasar y a aplicar las ideas y estrategias importantes que se desarrollaron en este capítulo.

Usa modelos geométricos para desarrollar expresiones

1. Haz un diagrama de rectángulo que modele la expresión $(x + 3)(x + 6)$. Úsalo para desarrollar el producto de estos binomios.

2. Haz un diagrama de rectángulo que modele la expresión $(3t - 1)(t + 1)$. Úsalo para desarrollar el producto de estos binomios.

3. Considera la gráfica.



a. Escribe una expresión para el área de la región no sombreada.

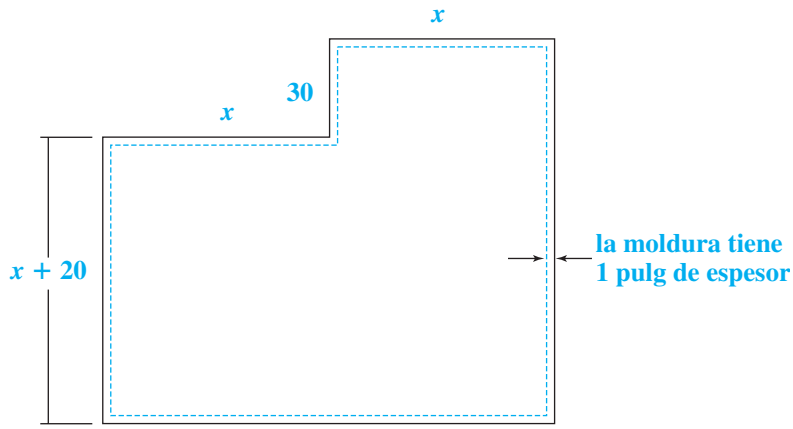
b. Escribe una expresión, con y sin paréntesis, para el área de la región sombreada.

Usa la propiedad distributiva para desarrollar expresiones

4. Describe los pasos que se requieren para reducir $x(1 - x) + (1 - x)(3 - x)$. Da la expresión reducida.

5. Reduce la expresión $(x^2 - 1)(y^2 - 1) - (1 + xy)(1 + xy)$.

6. La *moldura* es una franja de madera que se coloca en la base de la pared para dar a una habitación una apariencia de "acabado". El diagrama muestra el plano de una habitación con una moldura de 1 pulgada de espesor a lo largo de las orillas. Las medidas están en pulgadas.



a. Escribe una expresión para el área del piso antes de que se instalara la moldura. Reduce tu expresión tanto como sea posible.

b. Escribe una expresión para el área del piso que queda, después de instalar la moldura. Reduce tu expresión tanto como sea posible.

Desarrolla expresiones de las formas $(ax + b)^2$, $(ax - b)^2$ y $(ax + b)(ax - b)$

7. Considera expresiones de la forma $(ax + b)^2$.

a. Describe un atajo para desarrollar tales expresiones y explica por qué funciona.

b. Usa tu atajo para desarrollar $(x + 13)^2$.

8. Considera expresiones de la forma $(ax - b)^2$.

a. Describe un atajo para desarrollar tales expresiones y explica por qué funciona.

b. Usa tu atajo para desarrollar $\left(\frac{x}{2} - 1.5\right)^2$.

9. Considera expresiones de la forma $(ax + b)(ax - b)$.

a. Describe un atajo para desarrollar tales expresiones y explica por qué funciona.

b. Usa tu atajo para desarrollar $(xy + 3)(xy - 3)$.

10. Vuelve a plantear $24 \cdot 26$ como el producto de dos binomios y después usa el patrón de la "diferencia de cuadrados" para calcular el producto.

Reduce expresiones con fracciones algebraicas

Reduce cada expresión y explica cada paso.

11. $\frac{^{-}3x}{9 - 6x}$

12. $\frac{15xy}{3x^3y^3}$

Resuelve expresiones con fracciones algebraicas

13. Considera la ecuación $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1} = \frac{8}{x^2-1}$.

a. Describe el primer paso que darías para resolver esta ecuación.

b. Resuelve la ecuación.

14. Considera la ecuación $\frac{k}{k-1} - \frac{5}{2} = \frac{1}{k-1}$.

a. Resuelve la ecuación.

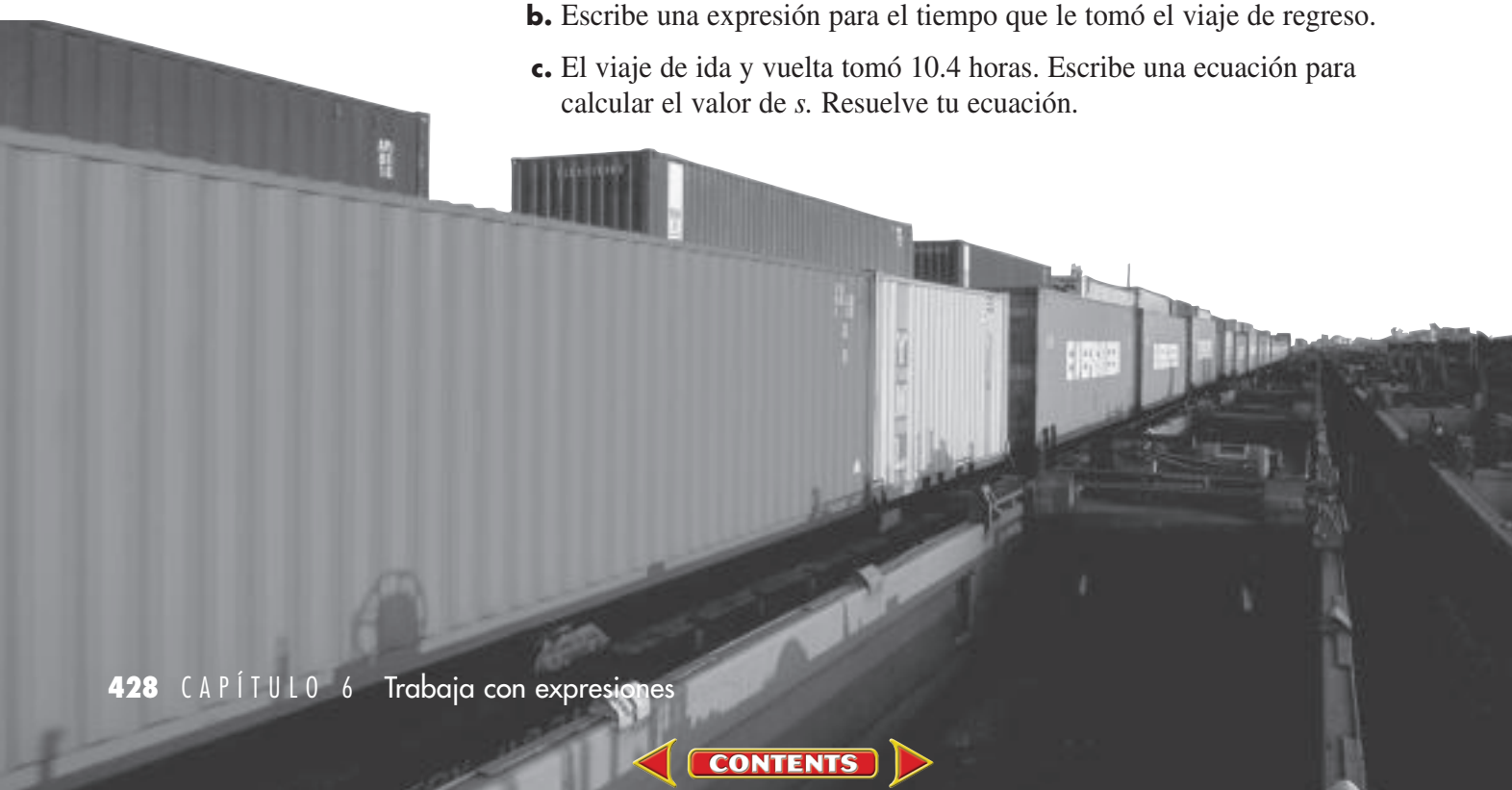
b. Explica por qué es especialmente importante verificar tus soluciones cuando resuelves ecuaciones con fracciones algebraicas.

15. Cada semana, un tren de carga entrega cereales en un puerto a 156 millas de distancia. La semana pasada, el tren viajó al puerto a una velocidad promedio de s millas por hora. En el viaje de regreso, el tren llevaba vagones vacíos y pudo viajar a un promedio de 16 millas por hora más rápido.

a. Escribe una expresión para el tiempo que le tomó al tren llegar al puerto.

b. Escribe una expresión para el tiempo que le tomó el viaje de regreso.

c. El viaje de ida y vuelta tomó 10.4 horas. Escribe una ecuación para calcular el valor de s. Resuelve tu ecuación.



Demuestra tus destrezas

Vuelve a plantear cada expresión sin paréntesis.

16. $^{-}6(x + 1) + 2(5 - x) - 9(1 - x)$

17. $^{-}a(1 - 3a) - (2a^2 - 5a)$

18. $(2b + 1)(4 + b)$

19. $(x + 1)(5 - x)$

20. $(2c - 8)(c - 2)$

21. $(2x + y)(y - xy)$

22. $(L - 8)^2$

23. $(x - xy)(x + xy)$

Reduce cada expresión.

24. $\dfrac{14x^2y^2}{2xy}$

25. $(5xy - 2)(1 - 2x)$

26. $(d + 2)(1 - d) + (1 - 2d)(3 - d)$

27. $\dfrac{5n}{n - 1} + \dfrac{3n}{2n - 2}$

28. $\dfrac{b}{3} + \dfrac{b - 1}{b + 1} - \dfrac{b}{2b + 2}$

29. $\dfrac{1}{k - 1} - \dfrac{1}{k + 2}$

Resuelve cada ecuación.

30. $\dfrac{3}{x + 4} = \dfrac{2}{x - 4}$

31. $\dfrac{^{-}2x + 2}{x - 1} = {}^{-}3$